

Correction de l'interrogation n° 1

Questions de cours

1. Critère de Riemann en $+\infty$:

Soit f une fonction localement intégrable et positive sur un intervalle $[a, +\infty[$. Alors :

- s'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.
- s'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

Remarques :

- Ce critère est bien sûr aussi valable pour une fonction *négative*. La constance du signe de f est nécessaire dans la démonstration pour utiliser les critères de comparaison (majorations ou équivalents).
- Cependant, l'hypothèse de positivité n'est pas strictement nécessaire. En effet, si f est quelconque, dans le cas où $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, pour un $\alpha > 1$, on a également $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha |f(t)| = 0$, et par conséquent, l'intégrale converge absolument, donc converge. Et dans le cas où $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$, pour un $\alpha \leq 1$, cela implique que f est positive sur un voisinage de $+\infty$. Ainsi, l'hypothèse de positivité n'est pas nécessaire, à condition toutefois :

- d'avoir prouvé le critère de Riemann pour les fonctions positives auparavant (on s'en sert dans l'argument ci-dessus)
- d'avoir prouvé que la convergence absolue implique la convergence.

- Attention, ce critère n'est bien sûr pas une équivalence : il peut exister des fonctions positives d'intégrale convergente en $+\infty$ mais telles qu'il n'existe pas de réel $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$.

Exemple : considérer f constante par morceaux définie par e^n sur les intervalles $]n - e^{-2n}, n + e^{-2n}[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et 0 ailleurs.

- On peut éventuellement rajouter aux deux assertions du critère ci-dessus, la troisième ci-dessous :

S'il existe α et $\ell \neq 0$ tels que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = \ell$, alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ sont de même nature.

À part lorsque $\alpha = 1$, on peut toujours utiliser à la place de cette assertion le critère énoncé plus haut, quitte à diminuer ou augmenter légèrement α .

- Un point de rédaction : éviter les mots *pour* et *avec* dans l'utilisation suivante : “pour (avec) $\alpha > 1$ ”. Cette expression est ambiguë : elle peut signifier tout aussi bien “pour tout $\alpha > 1$ ” que “pour un $\alpha > 1$ bien choisi”. Il vaut mieux utiliser des quantificateurs : $\forall \alpha > 1$ ou $\exists \alpha > 1$ selon le cas.

Démonstration

- Le troisième point (cas où $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = \ell \neq 0$) est immédiat, car dans ce cas, $f(t) \sim_{+\infty} \frac{\ell}{t^\alpha}$, et on peut utiliser le critère de comparaison de la nature des intégrales de fonctions équivalentes positives.
- Soit $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$. Alors, pour t assez grand, $t^\alpha f(t) \leq 1$. En d'autres termes, il existe A tel que $\forall t \geq A$, $f(t) \leq \frac{1}{t^\alpha}$. On utilise alors le critère de comparaison par majoration, valable pour les fonctions positives, sachant que l'intégrale de Riemann $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge puisque $\alpha > 1$.
- Même raisonnement dans le cas où il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$: pour t assez grand, $t^\alpha f(t) \geq 1$, donc $f(t) \geq \frac{1}{t^\alpha}$.

2. Théorème d'Abel

Soit f et g deux fonctions localement intégrables sur un intervalle $[a, +\infty[$, et telles que :

- f est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$;
- la fonction $x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ est bornée.

Alors, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)g(t) dt$ converge.

Remarques

- Le théorème d'Abel donne un résultat de convergence *en $+\infty$ uniquement*. Si on veut utiliser le théorème d'Abel en une autre borne, il faut faire un changement de variable adéquat au préalable.
- L'hypothèse sur g équivaut à dire que g admet une primitive bornée sur $[a, +\infty[$.
- L'hypothèse sur g n'est pas équivalente à dire que l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge. Si cette intégrale converge, alors la fonction $x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ est effectivement bornée. En revanche, il n'est pas nécessaire d'avoir la convergence de cette intégrale pour que l'hypothèse sur g soit vérifiée : voir l'exemple le plus classique $g(t) = \sin t$.

Problème

1. Au voisinage de 0, $\sin x = x + o(x)$. Par conséquent,

$$\ln \sin x = \ln(x + o(x)) = \ln(x(1 + o(1))) = \ln x + \ln(1 + o(1)) = \ln x + o(1).$$

On en déduit :

$$\frac{\ln \sin x}{\ln x} = 1 + o\left(\frac{1}{\ln x}\right),$$

ce qui tend vers 1 lorsque x tend vers 0.

Remarques

- On ne peut pas composer des équivalents ! Si $f \sim_a g$, on n'a pas forcément $h \circ f \sim_a h \circ g$. Par exemple, $x \sim_{+\infty} x + 1$, mais $e^x \not\sim_{+\infty} e^{x+1}$.
 - L'avantage essentiel du développement limité sur l'équivalent est qu'il s'agit d'une véritable égalité : contrairement aux équivalents, on peut en faire tout ce qu'on peut faire avec une égalité, notamment composer et sommer.
 - Il est donc dommage, comme certains le font, d'écrire le développement limité à l'aide d'un équivalent $f(t) \sim a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$. Tout d'abord, exprimé ainsi, ce n'est pas aussi précis qu'un développement limité à l'ordre n , car seul le terme prépondérant du développement compte (les autres sont négligeables, et pourraient être remplacés par n'importe quoi du même ordre de grandeur). Et ensuite, on perd la maniabilité des développements limités, provenant du fait qu'ils sont exprimés par des égalités.
2. La fonction $x \mapsto \ln \sin x$ est continue, donc localement intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. Il y a un problème de convergence en 0 pour l'intégrale I . D'après la question 1, $\ln \sin x \sim_0 \ln x$, et ces fonctions sont de signe constant (négatif) au voisinage de 0 (sur $]0, 1]$ pour $\ln x$). Par conséquent, les intégrales I et $\int_0 \ln x \, dx$ sont de même nature en 0. Or, cette dernière intégrale est une intégrale de Bertrand convergente. Donc I est une intégrale convergente. La fonction $x \mapsto \ln \cos x$ est continue, donc localement intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Il y a un problème de convergence en $\frac{\pi}{2}$ pour l'intégrale J . On fait le changement de variables $y = \frac{\pi}{2} - x$ (directement sur l'intégrale impropre) :

$$J = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \, dy = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin y \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy = I$$

Par conséquent, la convergence de J pour la borne $\frac{\pi}{2}$ est équivalente à la convergence de I pour la borne 0, et de plus, $I = J$.

Remarques

- Comme beaucoup l'ont fait, on peut redémontrer la convergence de l'intégrale $\int_0 \ln x \, dx$, soit par le critère de Riemann, soit en calculant une primitive de $\ln x$. Mais mieux vaut utiliser les résultats du cours : cela prend moins de temps ! (Rappel : un examen est une course contre la montre).
- **Erreur gravissime à éviter à tout prix :** si f et g sont deux fonctions localement intégrables et positives sur $]a, b]$, et équivalentes en a ; **en aucun cas on ne peut comparer la valeur des intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$. On ne peut comparer que leur nature !!!**

– Il est donc inexact d'écrire dans ce cas $\int_a^b f \sim_a \int_a^b g$, qui, d'une part, n'a pas beaucoup de sens, et d'autre part, suppose une comparaison de la valeur et non de la nature des intégrales. Il faut écrire *en toutes lettres* que les deux intégrales sont de même nature en la borne a .

3. La fonction $x \mapsto \ln \sin 2x$ est continue, donc localement intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Il y a un problème en 0 et en $\frac{\pi}{2}$.

D'après la question 1, $\ln \sin 2x \sim_0 \ln 2x$, donc, comme pour la question 2, l'intégrale K est convergente en 0, par comparaison à une intégrale de Bertrand convergente.

Pour la borne $\frac{\pi}{2}$, on effectue le changement de variable $y = \frac{\pi}{2} - x$. Alors,

$$K = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln \sin(\pi - 2x) \, dx = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln \sin 2x \, dx.$$

Ainsi l'étude de la borne $\frac{\pi}{2}$ se ramène à celle de la borne 0. Donc K est convergente.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, donc

$$\ln \sin 2x = \ln 2 + \ln \sin x + \ln \cos x.$$

Par conséquent, puisque les quatre intégrales ci-dessous convergent (questions 2 et 3),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx$$

Il en résulte que $K = I + J + \frac{\pi}{2} \ln 2$.

Remarque

Pour pouvoir séparer une intégrale impropre $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$, il faut s'assurer que toutes les trois intégrales convergent (et l'écrire!). Il peut arriver que $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ divergent, mais que $\int_a^b f + g$ converge. Dans ce cas, l'égalité ci-dessus n'a aucun sens, puisqu'elle compare un réel bien défini, et une quantité non définie.

5. Effectuons le changement de variables $y = 2x$ dans l'intégrale K :

$$K = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin y \, dy = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin y \, dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin y \, dy \right).$$

En effectuant un changement de variables $t = \pi - y$,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin y \, dy = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln \sin(\pi - t) \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt$$

Par conséquent, $K = \frac{1}{2}(I + I) = I$.

6. D'après les questions 2 et 5, $I = J = K$. On déduit donc de la question 4 que $I = 2I + \frac{\pi}{2} \ln 2$, puis que

$$I = J = K = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$