Correction de l'interrogation n° 2

Questions de cours

Je vous renvoie à votre cours ! Voici tout de même quelques remarques :

1. *Apprenez votre cours sérieusement !* C'est indispensable pour réussir à l'examen ! Pour ce chapitre peut-être encore plus que pour les autres puisque l'exercice-type sera l'étude d'une fonction définie par une intégrale, et notamment l'étude de la convergence normale ou uniforme (comment répondre à une telle question si on ne sait pas ce qu'est la convergence normale ou la convergence uniforme ?) afin de pouvoir utiliser les théorèmes donnant la continuité et la dérivabilité (comment utiliser correctement ces théorèmes si on ne connait pas leurs hypothèses d'application ?). À ce propos, pour l'utilisation de ces théorèmes, tout se trouve dans les *justifications* : une copie qui n'explique pas pourquoi on se trouve dans les conditions d'application n'aura jamais les points de la question !
2. Plus spécifiquement, les convergences simple et absolue sont des convergences *points par points*, c'est-à-dire valeur de x par valeur de x, tandis que les convergences uniforme et normale sont données par rapport à tout un intervalle de valeurs de x : convergence uniforme sur I ne signifie par convergence uniforme en tout point de I !
3. Pour la convergence normale, il faut trouver une majoration *indépendante de* x !
4. Il n'y a pas d'implication ni dans un sens ni dans l'autre entre convergence absolue et convergence uniforme.
5. Concernant le théorème de dérivation de fonctions définies par une intégrale *impropre*, n'oubliez pas, par rapport au cas d'intégrales définies, d'ajouter l'hypothèse de *convergence uniforme* de l'intégrale de la dérivée partielle.

Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Argsh}(xt)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$.

1. Pour montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que l'intégrale définissant f est simplement convergente. On note $h(x,t) = \frac{\operatorname{Argsh}(xt)}{1+t^2}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et donc localement intégrable sur cet intervalle. Le seul problème de convergence se situe en $+\infty$.
   - Si $x > 0$, alors la formule rappelée dans l'énoncé pour Argsh permet d'obtenir l'équivalent suivant de $h(x,t)$ lorsque t tend vers $+\infty$:
   $$h(x,t) \sim_{t\to\infty} \frac{\ln 2xt}{t^2} \sim \frac{\ln t}{t^2}$$
   Puisque h est de signe constant (à x fixé, positif si $x > 0$, négatif si $x < 0$), l'intégrale définissant $f(x)$ est de même nature en $+\infty$ que l'intégrale $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\, \mathrm{d}t$, qui converge (intégrale de Bertrand).

- Si $x = 0$, $h(x,t) = 0$ pour toute valeur de t ; par conséquent, l'intégrale converge, et $f(0) = 0$.
- Si $x < 0$, alors $|h(x,t)| = -h(x,t) = h(-x,t)$, car Argsh est impaire. Par conséquent, d'après ce qui précède, l'intégrale converge absolument, et de plus, $f(x) = -f(-x)$.

Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$, et f est impaire.

2. Soit $a > 0$, et soit $x \in [-a,a]$. Alors, puisque Argsh est impaire et croissante (sa dérivée est positive !), pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $|\operatorname{Argsh}(xt)| \leqslant \operatorname{Argsh}(at)$. Par conséquent,

$$|h(x,t)| \leqslant \frac{\operatorname{Argsh}(at)}{1+t^2}$$

Cette majoration est indépendante de x. Il suffit alors de montrer que $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\operatorname{Argsh}(at)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, ce qui provient de l'existence de $f(a)$ (question 1). Par conséquent, l'intégrale définissant f converge normalement, donc uniformément sur tout intervalle $[-a,a]$, pour $a > 0$. La fonction h étant continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, l'utilisation du théorème de continuité donne la continuité de f sur tout $[-a,a]$, donc sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x > 0$. Comme $h(x,t) \geqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a une première minoration de f :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Argsh}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Argsh}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

D'autre part, pour tout $t \geqslant 1$, $\operatorname{Argsh}(xt) \geqslant \operatorname{Argsh}(x)$, puisque Argsh est croissante. Par conséquent,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Argsh}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \operatorname{Argsh}(x)\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{Argsh}(x)[\operatorname{Arctan}(t)]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4}\operatorname{Argsh}(x).$$

La limite de $\operatorname{Argsh}(x)$ en $+\infty$ est $+\infty$, par conséquent, f est minorée par une fonction tendant vers $+\infty$: la limite de f en $+\infty$ est également $+\infty$.

La fonction f étant impaire, sa limite en $-\infty$ est donc $-\infty$.

4. Soit $a > 0$. On va montrer que toutes les conditions du théorème de dérivation sont vérifiées sur l'intervalle $[a,+\infty[$:
   - h est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge simplement sur $[a,+\infty[$ (question 1).
   - h est dérivable par rapport à x, de dérivée partielle continue sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}^+$. Plus précisément, h est de classe C^1 sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}^+$ (et même C^∞) en tant que produit, composition, quotient de fonctions de classe C^1.
   - Il reste à montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)\sqrt{1+x^2t^2}}$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$. Pour cela, on va montrer la convergence normale : pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, et tout $x \geqslant a$,

$$0 \leqslant \frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+x^2t^2}} \leqslant \frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+a^2t^2}}.$$

Cette majoration est indépendante de x dans $[a,+\infty[$, et $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{t\ \mathrm{d}t}{(1+t^2)\sqrt{1+a^2t^2}}$ converge, car $\dfrac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+a^2t^2}}$ est équivalente en $+\infty$ à $\dfrac{1}{at^2}$, fonction positive dont l'intégrale converge en $+\infty$ (intégrale de Riemann). Par conséquent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}\ \mathrm{d}t$ converge normalement, donc uniformément sur $[a,+\infty[$, pour tout $a>0$ Par conséquent, on peut appliquer le théorème de dérivation : f est dérivable sur tout intervalle $[a,+\infty[$, $a>0$, donc sur leur union, c'est-à-dire $\mathbb{R}_+^*$, et

$$f'(x)=\int_0^{+\infty} \frac{t\ \mathrm{d}t}{(1+t^2)\sqrt{1+x^2t^2}} \tag{1}$$

Par imparité, on obtient la dérivabilité sur $\mathbb{R}_-^*$, donc sur $\mathbb{R}^*$ tout entier. La formule (1) est valable sur $\mathbb{R}^*$.

Enfin, la fonction $(x,t)\mapsto \dfrac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+x^2t^2}}$ étant positive sur $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}_+$, on en déduit que f' est positive sur $\mathbb{R}^*$; par conséquent, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $g(x)$ définie par $g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}\ \mathrm{d}t$

   (a) On note $k(x,t)=\frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}$. Soit $x>0$ fixé. Alors la fonction $t\mapsto k(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc localement intégrable sur cet intervalle. Le seul problème de convergence est en $+\infty$. Or, $k(x,t)$ est positive, et équivalente lorsque t tend vers $+\infty$ à $\frac{1}{xt^2}$, dont l'intégrale converge en $+\infty$ (intégrale de Riemann). Par conséquent, l'intégrale définissant $g(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$

   (b) On montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} k(x,t)\ \mathrm{d}t$ converge uniformément sur tout intervalle $[a,+\infty[$, $a>0$. En effet, soit $a>0$; alors, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ et tout $x\geqslant a$,

   $$0\leqslant k(x,t)\leqslant \frac{t}{(1+t^2)(1+at)},$$

   et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ \mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+at)}$ converge, puisque c'est l'intégrale définissant $g(a)$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} k(x,t)\ \mathrm{d}t$ converge normalement, donc uniformément sur $[a,+\infty[$. Comme de plus $k(x,t)$ est continue sur $[a,+\infty[\times\mathbb{R}^+$, on en déduit, par application du théorème de continuité, que g est continue sur $[a,+\infty[$, ceci pour tout $a>0$. Elle est donc continue sur l'union de ces intervalles, à savoir $\mathbb{R}_+^*$.

   (c) Pour tout $a\geqslant 0$ et tout $b\geqslant 0$, on a $\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (élever au carré !). Par conséquent, pour tout $x>0$, et tout $t\geqslant 0$, $\sqrt{1+x^2t^2}\leqslant 1+xt$. Ainsi,

   $$\frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+x^2t^2}}\geqslant\frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}.$$

   Par intégration de cette inégalité entre 0 et $+\infty$, on obtient $f'(x)\geqslant g(x)$, pour tout $x>0$.

(d) Un peu de calcul ! On rappelle la démarche pour trouver une décomposition en éléments simples de $k(x,t)$. On écrit la forme *a priori* de cette décomposition :

$$k(x,t) = \frac{t}{(1+t^2)(1+xt)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{c}{1+xt}.$$

Les coefficients a, b et c peuvent bien entendu dépendre de x.

Pour trouver c, on multiplie l'égalité par $(1+xt)$, et on évalue en $-\frac{1}{x}$. On trouve $c = \frac{-x}{1+x^2}$.

Pour trouver a, on multiplie par t et on prend la limite en $+\infty$. On trouve $0 = a + \frac{c}{x}$, d'où $a = \frac{1}{1+x^2}$.

Enfin, pour trouver b, on évalue en 0. On trouve $0 = b + c$, d'où $b = \frac{x}{1+x^2}$. Par conséquent,

$$k(x,t) = \frac{1}{1+x^2}\left[\frac{t}{1+t^2} + \frac{x}{1+t^2} - \frac{x}{1+xt}\right]$$

En intégrant cette expression terme à terme, on obtient alors :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{1+x^2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2) + x\operatorname{Arctan}(t) - \ln(1+xt)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1+x^2}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t^2}{(1+xt)^2}\right) + x\operatorname{Arctan}(t)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{x^2} + \frac{\pi x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\pi x}{2} - \ln x\right). \end{aligned}$$

(e) On commence par montrer que $f'(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0. En effet, l'expression précédente obtenue pour g montre que la limite de g en 0^+ est $+\infty$. Comme pour tout $x > 0$, $f'(x) \geqslant g(x)$, la limite de $f'(x)$ en 0^+ est également $+\infty$. Par imparité de f (et donc parité de f'), c'est également la limite en 0^-, donc la limite en 0.

On va montrer que cela implique que le taux d'accroissement $\frac{f(h)-f(0)}{h}$ tend vers $+\infty$ lorsque h tend vers 0. Pour cela, on utilise le théorème des accroissements finis : f étant continue sur $[0,h]$, et dérivable sur $]0,h[$, il existe $c_h \in]0,h[$ tel que $\frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(c_h)$. Il suffit de montrer que $f'(c_h)$ tend vers $+\infty$ lorsque h tend vers 0. Or, $0 < c_h < h$, donc c_h tend vers 0 lorsque h tend vers 0 (théorème des gendarmes). Donc $f'(c_h)$ tend vers la limite de f' en 0, à savoir $+\infty$.

Ainsi, f n'est pas dérivable en 0, mais y admet une tangente verticale.

6. On peut éviter le recours à la dérivation seconde en étudiant directement les variations de f'. Soit $0 < x < y$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+x^2t^2}} > \frac{t}{(1+t^2)\sqrt{1+y^2t^2}}.$$

En intégrant cette inégalité sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $f'(x) > f'(y)$. Par conséquent, f' est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et f est donc concave sur $\mathbb{R}_+$. Par imparité, f est convexe sur $\mathbb{R}_-$.