Université Paris 6 Lundi 17 mai 2004
DEUG SCM 23 - 2003/04 – 2nd semestre
Math 4

Interrogation n° 3

Questions de cours

1. Voir votre cours.
2. Ce que j'attendais :
   - En montrant la convergence normale (notion à définir) ;
   - En utilisant le théorème d'Abel (théorème à énoncer).

   Tout autre moyen (correct) est accepté.
3. Voir votre cours. Ne pas oublier les hypothèses.

Quelques calculs

1. (a) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi, |y| \leqslant \sin x\}$. En utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\iint_D y^2 \sin x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_0^\pi \sin x \left(\int_{-\sin x}^{\sin x} y^2 \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \sin x \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\sin x}^{\sin x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3} \int_0^\pi \sin^4 x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3} \int_0^\pi \left(\frac{1}{8} \cos(4x) - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8} \right) \mathrm{d}x \qquad \text{(linéarisation)} \\
&= \frac{2}{3} \left[\frac{1}{32} \sin(4x) - \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3x}{8} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

(b) En effectuant des coupes horizontales sur D, on peut aussi décrire D ainsi : $D = D' \cup D''$, où

$$D' : \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ \operatorname{Arcsin} y \leqslant x \leqslant \pi - \operatorname{Arcsin} y \} \end{cases} \qquad \text{et } D'' : \begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant 0, \\ -\operatorname{Arcsin} y \leqslant x \leqslant \pi + \operatorname{Arcsin} y \} \end{cases}$$

(faire un dessin pour s'en convaincre). D'autre part, en effectuant le changement de variable $y' = -y$, on obtient

$$\iint_{D''} y^2 \sin x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_{D'} y^2 \sin x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\iint_D y^2 \sin x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= 2 \iint_{D'} y^2 \sin x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= 2 \int_0^1 y^2 \left(\int_{\operatorname{Arcsin} y}^{\pi - \operatorname{Arcsin} y} \sin x \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= 2 \int_0^1 y^2 \left(\cos(\operatorname{Arcsin} y) - \cos(\pi - \operatorname{Arcsin} y) \right) \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Or, $\cos(\pi - \operatorname{Arcsin} y) = -\cos(\operatorname{Arcsin} y) = -\sqrt{1-\sin^2(\operatorname{Arcsin} y)} = -\sqrt{1-y^2}$, d'où :

$$\begin{aligned}\iint_D y^2 \sin x \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y &= 4\int_0^1 y^2\sqrt{1-y^2}\; \mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t \; \mathrm{d}t \quad \text{(changement de variables } y=\sin t) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t)\; \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(4t))\; \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

2. (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+xy}\; \mathrm{d}y = \Big[\ln(1+xy)\Big]_{y=0}^{y=1} = \ln(1+x)$.

   (b) D'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x^2)}\; \mathrm{d}x = \iint_{[0,1]^2} \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}\; \mathrm{d}x\; \mathrm{d}y$. En effectuant les intégrations dans l'autre sens (c'est-à-dire en intégrant d'abord par rapport à x), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x^2)}\; \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}\; \mathrm{d}x\right)\; \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\left(\int_0^1 \left(\frac{-y}{1+xy}+\frac{x+y}{1+x^2}\right)\; \mathrm{d}x\right)\; \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\left[-\ln(1+xy)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+y\operatorname{Arctan}(x)\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{\ln(1+y)}{1+y^2}+\frac{\ln 2}{2(y^2+1)}+\frac{y\pi}{4(y^2+1)}\right)\; \mathrm{d}y\end{aligned}$$

   En ramenant le premier facteur de cette somme de l'autre côté de l'égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x^2)}\; \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\frac{\ln 2}{4(y^2+1)}+\frac{y\pi}{8(y^2+1)}\right)\; \mathrm{d}y \\ &= \left[\frac{\ln 2}{4}\operatorname{Arctan} y + \frac{\pi\ln(1+x^2)}{16}\right]_0^1 = \frac{\pi\ln 2}{16}+\frac{\pi\ln 2}{16} = \frac{\pi \ln 2}{8}.\end{aligned}$$

   (c) À l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x}\; \mathrm{d}x = \Big[\operatorname{Arctan}(x)\ln(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\; \mathrm{d}x = \frac{\pi\ln 2}{4} - \frac{\pi\ln 2}{8} = \frac{\pi \ln 2}{8}.$$

3. Soit D la portion d'espace définie par : $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1 \\ x^2+y^2-z^2+1 \geqslant 0 \end{cases}$ Son volume V est égal à :

$$V = \iiint_D \mathrm{d}x\; \mathrm{d}y\; \mathrm{d}z = \iiint_{D'} r\; \mathrm{d}r\; \mathrm{d}\theta\; \mathrm{d}z,$$

où on a posé $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Le nouveau domaine d'intégration D' est alors :

$$D' : \begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ -\sqrt{1+r^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1+r^2}. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\left(\int_{-\sqrt{1+r^2}}^{\sqrt{1+r^2}} \mathrm{d}z\right)\; \mathrm{d}r \\ &= 2\pi\int_0^1 2r\sqrt{1+r^2}\; \mathrm{d}r \\ &= 2\pi\left[\frac{2}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$