Université Paris 6 Février 2004
DEUG SCM 23 - 2003/04 – 2nd semestre
Math 4 – Groupes 1/2

Correction du problème 2 – Intégrales impropres

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0, \mathrm{e}[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(\mathrm{e}-x)}\left(\ln\frac{1}{x}+1\right)}$$

La fonction f est continue, donc localement intégrable sur $]0, \mathrm{e}[$. Il faut étudier plus précisément la convergence aux deux bornes 0 et e.

– **Borne 0** : On détermine un équivalent de f en 0 :

$$f(x) \sim_0 \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}\sqrt{x}\ln\frac{1}{x}} = \frac{-1}{\sqrt{\mathrm{e}}\sqrt{x}\ln x}.$$

La fonction f étant positive, l'étude de la convergence de $\int_0^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$ en la borne 0 se ramène à l'étude de la convergence en 0 de

$$\int_0 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\ln x}.$$

On reconnaît une intégrale de Bertrand convergente. On peut aussi remontrer cette convergence en utilisant le critère de Riemann pour les fonctions positives. En effet,

$$x^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\ln x},$$

et cette expression tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

– **Borne e** : Posons $y = \mathrm{e} - x$. Alors,

$$\ln\frac{1}{x} = -\ln(\mathrm{e}-y) = -\ln\mathrm{e} - \ln\left(1-\frac{y}{\mathrm{e}}\right) = -1 + \frac{y}{\mathrm{e}} + o(y)$$

au voisinage de 0, donc

$$f(x) \sim_{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{e}}{\sqrt{\mathrm{e}(\mathrm{e}-x)}(\mathrm{e}-x)} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{(\mathrm{e}-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi, f étant positive, son intégrale diverge à la borne e (comparaison avec une série de Riemann divergente).

Par conséquent, l'intégrale diverge.

Exercice 2

1. Soit $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2} - \left(x+1+\frac{1}{2x}\right)$. Cette fonction est continue, donc localement intégrable sur $[1,+\infty[$. Le seul problème est donc la borne $+\infty$. En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient :
$$f(x) = \frac{x^2+2x+2-\left(x+1+\frac{1}{2x}\right)^2}{\sqrt{x^2+2x+2}+\left(x+1+\frac{1}{2x}\right)} = \frac{-\frac{1}{x}-\frac{1}{4x^2}}{\sqrt{x^2+2x+2}+\left(x+1+\frac{1}{2x}\right)} \sim_{+\infty} \frac{-1}{2x^2}$$
Cette fonction étant de signe constant au voisinage de $+\infty$, on peut utiliser les critères de comparaison de la convergence des intégrales pour les fonctions de signe constant : I converge, par comparaison à une intégrale de Riemann convergente.

2. Pour calculer une primitive de $y \mapsto \sqrt{y^2+1}$, on effectue une intégration par parties, en dérivant $\sqrt{y^2+1}$ et en intégrant 1 :
$$\int \sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}y = y\sqrt{y^2+1} - \int \frac{y^2}{\sqrt{y^2+1}}\,\mathrm{d}y = y\sqrt{y^2+1} - \int \frac{y^2+1}{\sqrt{y^2+1}}\,\mathrm{d}y + \int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,\mathrm{d}y$$
Par conséquent,
$$\int \sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}y = y\sqrt{y^2+1} - \int \sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}y + \int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,\mathrm{d}y,$$
d'où on déduit
$$\int \sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{y^2+1} + \int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\,\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{y^2+1} + \operatorname{Argsh} y\right).$$
On en déduit une primitive de $\sqrt{x^2+2x+2}$:
$$\int \sqrt{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x.$$
En faisant le changement de variable $y = x+1$, on obtient donc finalement
$$\int \sqrt{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{y^2+1} + \operatorname{Argsh} y\right) = \frac{1}{2}\left((x+1)\sqrt{x^2+2x+2} + \operatorname{Argsh}(x+1)\right).$$
En fin de compte, une primitive de f est donnée par :
$$F(x) = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\operatorname{Argsh}(x+1) - \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\ln x.$$

3. D'un côté, en utilisant la quantité conjuguée,
$$(x+1)\sqrt{x^2+2x+2} - x^2 - 2x = \frac{3x^2+6x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}+x^2+2x},$$
et cette expression tend vers $\frac{3}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$, d'autre part,
$$\operatorname{Argsh}(x+1) - \ln x = \ln\frac{(x+1)+\sqrt{x^2+2x+2}}{x},$$
et cette expression tend vers $\ln 2$. Par conséquent, la limite de F en $+\infty$ est $\frac{3}{4}+\frac{\ln 2}{2}$.

4. D'après la question 2,
$$F(1) = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}) - \frac{1}{2} - 1 = \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}) - \frac{3}{2}.$$
Par conséquent,
$$I = \frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2} - \left(\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}) - \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \sqrt{5} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$