Correction du problème n° 3

1. Le développement en série entière de e^u centré en 0 est donné par :

$$e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

Le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$: l'égalité ci-dessus est donc valable quelque soit $u \in \mathbb{R}$, notamment pour $|u| \leq 1$. On en déduit que

$$e^u - 1 - u = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{n+2}}{(n+2)!} = u^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{(n+2)!}$$

Or, pour tout $n \geq 0$, on a $n+1 \geq 1$ et $n+2 \geq 2$; par conséquent,

$$\frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{n!(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n!}.$$

On en déduit, pour tout $|u| \leq 1$:

$$\begin{aligned} |e^u - 1 - u| &= \left| u^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{(n+2)!} \right| \\ &\leq u^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u|^n}{(n+2)!} \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq u^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} \quad (\text{car } |u| \leq 1) \\ &\leq \frac{u^2}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \quad (\text{d'après l'inégalité ci-dessus}) \\ &= \frac{eu^2}{2}. \end{aligned}$$

Remarque.

La faute essentielle ayant été faite ici a été de considérer un développement *limité* de e^u plutôt que le développement *en série entière* : grâce au développement limité à l'ordre 2, on obtient

$$|e^u - 1 - u| = \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

Certaines personnes concluent en disant que $\frac{u^2}{2} < \frac{eu^2}{2}$ et que $o(u^2)$ était négligeable devant ce terme. On ne peut pas faire ce raisonnement, car $o(u^2)$ est négligeable devant $\frac{u^2}{2}$ *seulement sur un voisinage de 0*. Le développement limité est un résultat *local* (au voisinage d'un point), et ne peut donc pas être utilisé pour montrer un résultat *global* (sur tout un intervalle prédéfini, ici $] -1, 1[$). En revanche, le développement en série entière est un résultat *global* (sur tout le disque de convergence).

2. Soit f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{\sin x}{x}} - 1$. La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0) = e - 1$. Ainsi, f est localement intégrable sur $[0, +\infty[$. Le seul problème de convergence est en $+\infty$.

D'après la question 1, pour tout $x > 0$,

$$\left| e^{\frac{\sin x}{x}} - 1 - \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{e \sin^2 x}{2x^2}.$$

En effet, on a posé $u = \frac{\sin x}{x}$; pour tout $x > 0$, $|u| \leq 1$, car $\sin x \leq x$ (inégalité des accroissements finis pour $\sin x$ entre 0 et x).

Par conséquent,

$$\left| e^{\frac{\sin x}{x}} - 1 - \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{e}{2x^2}.$$

Or, $\int^{+\infty} \frac{e}{2x^2} dx$ est, à une constante multiplicative près, une intégrale de Riemann convergente, donc, par comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left| e^{\frac{\sin x}{x}} - 1 - \frac{\sin x}{x} \right| dx$ converge en $+\infty$ (et en 0 aussi, puisqu'elle peut y être prolongée par continuité). Par conséquent, $\int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{\sin x}{x}} - 1 - \frac{\sin x}{x} \right) dx$ converge absolument, donc converge.

Par ailleurs, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge en $+\infty$, d'après le théorème d'Abel, car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$, et

$$\left| \int_0^X \sin x dx \right| = |\cos X - 1| \leq 2.$$

Il en résulte que $\int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{\sin x}{x}} - 1 \right) dx$ est la somme de deux intégrales convergentes : elle converge donc. On obtient un résultat plus précis : elle est la somme d'une intégrale absolument convergente et d'une intégrale semi-convergente ; elle est donc semi-convergente, mais pas absolument convergente.

Solution alternative

On peut aussi mener la preuve de la manière suivante, en faisant un développement limité de e^u à l'ordre 2 :

$$e^u - 1 = u + \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

En posant $u = \frac{\sin x}{x}$ (u tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$), on obtient alors :

$$e^{\frac{\sin x}{x}} - 1 = \frac{\sin x}{x} + \frac{\sin^2 x}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

En effet, la fonction $\sin$ étant bornée, $o\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Par les mêmes arguments que dans la preuve précédente, $\int^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente, et $\int^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{2x^2} dx$ est absolument convergente. De plus, pour x assez grand, $\left| o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq \frac{1}{x^2}$, donc l'intégrale $\int^{+\infty} o\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ converge absolument. Par conséquent, $\int^{+\infty} \left(e^{\frac{\sin x}{x}} - 1 \right) dx$ est la somme de trois intégrales convergentes en $+\infty$, dont une seule n'est pas absolument convergente. Elle est donc semi-convergente.

Remarque. On est allé jusqu'à l'ordre 2 pour le développement limité pour être sûr que le reste $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donne une intégrale absolument convergente.