Correction du devoir 4 (feuille 5 exercice 7)

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - \mathrm{e}^{-xt}) \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \, \mathrm{d}t$.

1. On montre que l'intégrale définissant F est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On note $g(x,t) = (1 - \mathrm{e}^{-xt}) \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Pour cette valeur de x, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc localement intégrable sur cet intervalle. Il faut étudier la convergence aux bornes 0 et $+\infty$.
   Lorsque $t \to 0$, puisque $1 - \mathrm{e}^{-xt} \sim xt$, et $\mathrm{e}^{-t} \sim 1$, on obtient $h(x,t) \sim x$, et par conséquent, $h(x,t)$ est prolongeable par continuité en $t = 0$ en posant $h(x,0) = x$. Par conséquent, 0 n'est pas une borne impropre : l'intégrale converge en 0.
   Pour montrer la convergence en $+\infty$, on majore $h(x,t)$ en remarquant que puisque $-xt \leqslant 0$, on a $0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-xt} \leqslant 1$. Ainsi,
   $$0 \leqslant h(x,t) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}.$$
   Comme $t^2 \cdot \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} = t\,\mathrm{e}^{-t}$ tend vers 0 en $+\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \, \mathrm{d}t$ converge en $+\infty$ d'après le critère de Riemann. De plus, cette majoration est indépendante de x ; ainsi, l'intégrale définissant $F(x)$ converge à la borne $+\infty$. Donc F converge simplement sur $]0, +\infty[$. On a même obtenu la convergence *normale*, puisque la majoration utilisée au cours de la démonstration ne dépend pas de x. La fonction F est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On va montrer qu'on est dans les conditions d'application du théorème de dérivabilité des fonctions définies par une intégrale généralisée :
   - $h(x,t)$ est continue sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$;
   - F est simplement convergente sur $]0, +\infty[$;
   - h est de classe C^1 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ en tant que somme, produit, composée, quotient de fonctions de classe C^1. En particulier, h est dérivable par rapport à x, de dérivée continue.
   - On montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \, \mathrm{d}t$ est uniformément convergente sur $]0, +\infty[$. Cela provient de la majoration
   $$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \mathrm{e}^{-t(x+1)} \leqslant \mathrm{e}^{-t},$$

valable pour tout $x > 0$, et de la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = 1$ (remarquer que la majoration est indépendante de x). Par conséquent, on a convergence normale donc uniforme sur $]0, +\infty[$.

Par conséquent, F est dérivable sur $]0, +\infty[$, et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(x+1)}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{x+1}\, \mathrm{e}^{-t(x+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x+1}.$$

3. Puisque $-xt \leqslant 0$, on a $\mathrm{e}^{-xt} \leqslant 1$, donc $0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-xt}$. D'autre part, d'après le théorème des accroissements finis appliqué à $g(y) = \mathrm{e}^{-y}$, pour tout $y > 0$, il existe $c_y \in]0, y[$ tel que

$$g(y) - g(0) = yg'(c_y),$$

c'est-à-dire $\mathrm{e}^{-y} - 1 = -y\, \mathrm{e}^{-c_y}$, ou encore $1 - \mathrm{e}^{-y} = y\, \mathrm{e}^{-c_y}$. Comme $c_y > 0$, on en déduit que

$$1 - \mathrm{e}^{-y} \leqslant y,$$

ceci pour tout $y \geqslant 0$ (évident pour $y = 0$). Par conséquent, en prenant $y = xt \geqslant 0$, on obtient l'inégalité voulue.

On en déduit l'encadrement suivant de $h(x, t)$:

$$0 \leqslant h(x, t) \leqslant x\, \mathrm{e}^{-t}.$$

En intégrant cet encadrement, on obtient finalement :

$$0 \leqslant F(x) \leqslant x \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = x.$$

Par conséquent, d'après le théorème des gendarmes, $F(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

4. On avait trouvé $F'(x) = \dfrac{1}{x+1}$. En primitivant cette égalité, on obtient

$$F(x) = \ln(1 + x) + C,$$

où C est la constante d'intégration. Puisque $F(0) = 0$ (question précédente, après prolongement par continuité), on en déduit que $C = 0$, et donc que

$$F(x) = \ln(1 + x).$$