Devoir 2 – Intégrales multiples, intégrales curvilignes

À rendre avant le vendredi 14 mai 2004

Exercice 1 – Le but de cet exercice est de calculer $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Justifier la convergence de cette intégrale.
2. Pour tout $a > 0$ on note $\Delta_a = [0, a] \times [0, a]$ et C_a le quart de disque défini par $x^2 + y^2 \leq a^2$, pour $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.
   (a) On pose $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ et $b = a\sqrt{2}$. Montrer que
   $$\iint_{C_a} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{\Delta_a} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{C_b} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
   (b) Calculer $\iint_{Ca} f(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ en passant en coordonnées polaires.
   (c) En déduire la valeur de I.

Exercice 2 –

1. Montrer la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + \cos x)}{\cos x}\ \mathrm{d}x$.
2. On note $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. Montrer que $I = \displaystyle\iint_D \frac{\sin y}{1 + \cos x \cos y}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
3. En déduire la valeur de I (on pourra faire le changement de variables $t = \tan \frac{x}{2}$).

Exercice 3 –

1. Calculer $\int_{AB} (x + y)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$, où AB désigne le chemin d'origine $A = (2, 0)$ et d'extrémité $B = (0, 0)$, dans les cas suivants :
   (a) AB est le segment de droite $[AB]$.
   (b) AB est le demi-cercle inférieur de diamètre $[AB]$.
   (c) AB est l'arc supérieur de l'ellipse d'équation $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.
2. Que remarquez-vous ? Expliquer.

Exercice 4 – Calculer l'aire de la surface définie par les équations

$$\left\{\begin{array}{l} x = t\ \mathrm{e}^\theta \cos\theta \\ y = t\ \mathrm{e}^\theta \sin\theta \\ z = \ \mathrm{e}^\theta. \end{array}\right| ,\theta \in [0, 2\pi],\ t \in [0, 1].$$

(On pourra au choix faire une intégration par parties, ou un changement de variable $u = \mathrm{Argsh}\, t$)

Rappel pour les groupes 1 et 2 : l'exercice 7 de la feuille 5 est à rendre en tant que problème 4 pour le mercredi 28 avril.