Interrogation n° 1

Durée : 40 minutes

Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices et téléphones portables est interdit.

Questions de cours

1. **(5 points)** Énoncé et démonstration du critère de Riemann en $+\infty$.
2. **(3 points)** Énoncé (sans démonstration) du théorème d'Abel pour la convergence des intégrales.

Problème

1. **(1 point)** Montrer que $\ln \sin x \sim_0 \ln x$.
2. **(3 points)** Montrer que les intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx$$

sont convergentes et ont même valeur (on pourra faire un changement de variable linéaire bien choisi).

3. **(2 points)** Montrer que l'intégrale $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x \, dx$ est convergente.
4. **(3 points)** Montrer que $K = I + J + \frac{\pi}{2} \ln 2$.
5. **(2 points)** En effectuant le changement de variable $y = 2x$ dans l'intégrale K , montrer que $K = I$.
6. **(1 point)** En déduire les valeurs de I , J et K .