Université Paris 6 — Lundi 5 avril 2004

DEUG SCM 23 - 2003/04 – 2nd semestre

Math 4

Interrogation n$^{\text{o}}$ 2

Durée : 50 minutes

Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices et téléphones portables est interdit. Le barême, sur 22 points, est donné à titre indicatif.

Questions de cours

1. **(3 points)** Définition de la convergence simple, absolue, uniforme et normale d'une intégrale $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$, impropre en b.
2. **(2 points)** Implications entre ces différents types de convergence.
3. **(2 points)** Énoncé du théorème de dérivation de fonctions définies par une intégrale généralisée.

Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Argsh}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. On rappelle que :

$$\mathrm{Argsh}(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \text{ et } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{Argsh}\,x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

1. **(1 points)** Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, et que f est impaire.
2. **(2 points)** Montrer que l'intégrale définissant f est normalement convergente sur tout intervalle $[-a,a]$, a>0. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. **(2 points)** Montrer que pour tout $x>0$, on a : $f(x) \geqslant \mathrm{Argsh}(x)\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, puis lorsque x tend vers $-\infty$.
4. **(2.5 points)** Montrer que f est dérivable sur tout intervalle $[a,+\infty[$, pour $a>0$. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et déterminer les variations de f.
5. **(6 points)** Soit $g(x)$ définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+xt)}\,\mathrm{d}t$
   (a) Montrer que g est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^*$
   (b) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Montrer que $g(x) \leqslant f'(x)$ pour tout $x>0$.
   (d) À l'aide d'une décomposition en éléments simples, montrer que $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\left(\dfrac{\pi x}{2} - \ln x\right)$
   (e) En déduire que f n'est pas dérivable en 0, mais que sa courbe y admet une tangente verticale.
6. **(1 point)** Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}_-^*$.
7. **(0.5 point)** Tracer la courbe représentative de f.