Université Paris 6 — Lundi 17 mai 2004
DEUG SCM 23 - 2003/04 – 2nd semestre
Math 4

Interrogation n° 3

Durée : 45 minutes

Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices et téléphones portables est interdit. Le barême est donné à titre indicatif.

Questions de cours

1. **(1 point)** Donner la définition de la convergence uniforme sur X d'une intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ à la borne $+\infty$.
2. **(2 points)** Dans la pratique, comment peut-on s'y prendre pour démontrer une telle convergence uniforme ? (Donner deux moyens ; si on fait appel à un théorème, l'énoncer avec précision ; si on fait appel à une autre notion de convergence d'intégrale, la définir).
3. **(2 points)** Énoncer le théorème de Green-Riemann.

Quelques calculs (les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes les unes des autres)

1. (a) **(3 points)** Calculer $\displaystyle\iint_D y^2 \sin x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi, |y| \leqslant \sin x\}$.
   (b) **(3 points)** Retrouver le résultat en inversant l'ordre d'intégration des deux variables.
2. (a) **(1 point)** Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}y$.
   (b) **(3 points)** En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.
   (c) **(1 point)** En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
3. **(4 points)** Calculer le volume de la portion d'espace définie par : $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1 \\ x^2+y^2-z^2+1 \geqslant 0 \end{cases}$