

Problème 1 – Intégrales impropres

À rendre le mercredi 25 février 2004

Sciences de la matière 2^e année (Lille, juin 1999)

1. On pose, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{x^{2-\alpha}}{1+x^2} dx.$$

- (a) Discuter, suivant la valeur de α , la nature de cette intégrale généralisée.
- (b) Calculer I_2 .
- (c) Calculer I_3 (on pourra utiliser le changement de variable $t = x^2$).

2. On pose, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$J_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx.$$

- (a) Montrer que cette intégrale est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- (b) On suppose maintenant que $\alpha > 1$. Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, deux réels λ_α et μ_α tels que l'on ait :

$$J_\alpha = \lambda_\alpha + \mu_\alpha I_\alpha.$$

En déduire J_2 et J_3 .