Université Paris 6 Février 2004

DEUG SCM 23 - 2003/04 – 2nd semestre

Math 4 – Groupes 1/2

Problème 1 – Intégrales impropres

À rendre le mercredi 25 février 2004

Sciences de la matière 2e année (Lille, juin 1999)

1. On pose, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{x^{2-\alpha}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$
   (a) Discuter, suivant la valeur de α, la nature de cette intégrale généralisée.

   (b) Calculer I_2.

   (c) Calculer I_3 (on pourra utiliser le changement de variable $t = x^2$).

2. On pose, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$J_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$
   (a) Monter que cette intégrale est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

   (b) On suppose maintenant que $\alpha > 1$. Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, deux réels λ_α et μ_α tels que l'on ait :
$$J_\alpha = \lambda_a + \mu_\alpha I_\alpha.$$
   En déduire J_2 et J_3.