Université Paris 6 Février 2004
DEUG SCM 23 - 2003/04 – 2nd semestre
Math 4 – Groupes 1/2

TD 1 – Intégrales impropres

Exercice 1 – Étudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha |\ln(x)|^\beta \,\mathrm{d}x$ *b)* $\displaystyle\int_0^1 \Big|\ln|\ln(x)|\Big|^\alpha \,\mathrm{d}x$ *c)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \cos x}$

d) $\displaystyle\int_0^1 (\operatorname{Arccos} x)^\alpha \,\mathrm{d}x$ *e)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)^\alpha \mathrm{d}x$ *f)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\operatorname{th} x - 1)\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^\alpha \,\mathrm{d}x$ *h)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x + 2 - \sqrt{x^2+4x+1}\right) \mathrm{d}x$ *i)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{Arccos}(1-x)}$

j) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x^2-x}} \,\mathrm{d}x$ *k)* $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\ln x)^{-\ln x} \,\mathrm{d}x$ *l)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-\frac{x}{x+1}} \,\mathrm{d}x$

m) $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\operatorname{sh}(\sqrt{\ln x}))^{-2} \,\mathrm{d}x$ *n)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + |\sin x|}$ *o)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x \sin x} \,\mathrm{d}x$

p) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^{\frac{5}{3}}} \,\mathrm{d}x$ *q)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + x^2\,\mathrm{e}^{-x}}$ *r)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{1+x^b} \,\mathrm{d}x$

s) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$ *t)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\right) - 1\right) \mathrm{d}x$ *u)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x.$

Exercice 2 – Calculer les intégrales suivantes après avoir justifié leur convergence :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ $(= \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3)$ *b)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ $(= 2)$

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ $(= \ln(1+\sqrt{2}))$ *d)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} \,\mathrm{d}x$ $(= \frac{1}{2})$

e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}x$ $(= \ln(1+\sqrt{2}))$ *f)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ $(= 2\ln 3)$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x}$ $(= \pi)$ *h)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - x \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ $(= \frac{\pi}{4})$

i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\operatorname{Arcsin}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ $(= 1 - \frac{\pi}{2} + \ln 2)$ *j)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$ $(= \frac{14}{25})$

k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x(1-x)^3)^{\frac{1}{4}}} \,\mathrm{d}x$ $(= \pi\sqrt{2})$ *l)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arcsin}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \,\mathrm{d}x$ $(= 2)$

Exercice 3 – (Fonction Γ d'Euler)

1. On définit la fonction Γ par $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Déterminer le domaine de définition D_Γ de Γ (c'est-à-dire l'ensemble des réels α pour lesquels l'intégrale définissant Γ converge).
2. Montrer que pour tout $\alpha \in D_\Gamma$, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
3. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 – Soit f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a, b[$, telles que les intégrales $\int_a^b |f|^2$ et $\int_a^b |g|^2$ convergent. Montrer que $\int_a^b fg$ converge.

Exercice 5 – Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante et continue, telle que l'intégrale $\int_0^\infty f$ converge.

1. Montrer que $xf(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. (On pourra considérer l'intégrale $\int_{\frac{x}{2}}^x f$).
2. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = x(f(x) - f(x+1))$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et calculer $\int_0^\infty g$.
3. Trouver une fonction f décroissante et continue telle que $xf(x)$ tende vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, mais telle que l'intégrale $\int_0^\infty f$ ne converge pas (contre-exemple à la réciproque de la question 1).

Exercice 6 – Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et admettant des limites finies A et B en $-\infty$ et $+\infty$ respectivement. Montrer que pour tout a, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+a) - f(x))\, \mathrm{d}x$ converge, et déterminer sa valeur.

Exercice 7 –

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable, continue à droite en 0, telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, \mathrm{d}x$ converge. Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, \mathrm{d}x$ converge et vaut $f(0) \cdot \ln \frac{b}{a}$.
2. Application : calculer les intégrales suivantes :

$$a)\ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}}{t}\, \mathrm{d}t; \quad b)\ \int_0^{+\infty} \frac{t-1}{\ln(t)}\, \mathrm{d}t; \quad c)\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt) - \cos(yt)}{t}\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 8 – Les intégrales suivantes convergent-elles ? Dans la mesure du possible, déterminer s'il s'agit d'une convergence absolue ou d'une semi-convergence.

$$a)\ \int_0^{+\infty} x^\alpha \sin x\, \mathrm{d}x,\ \alpha \in \mathbb{R} \qquad b)\ \int_0^{+\infty} \sin(x^\alpha)\, \mathrm{d}x \qquad c)\ \int_0^{+\infty} \sin x\ \sin\frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$$

$$d)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \quad e)\ \int_0^{+\infty} \mathrm{sh}\left(\frac{\sin x}{x^\alpha}\right) \mathrm{d}x \quad f)\ \int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin x}{x^\alpha}\right) - 1\right) \mathrm{d}x$$

Exercice 9 –

1. Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, +\infty[$ $(a > 0)$ telle que l'intégrale $\int_a^\infty f$ converge. Montrer que pour tout réel $\alpha \geqslant 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x$ converge.
2. Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et a un réel tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{d}x$ converge. Montrer que pour tout réel $b \geqslant a$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-bx}\, \mathrm{d}x$ converge.

Exercice 10 –

1. Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, telle que l'intégrale $\int_0^\infty f$ converge. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Trouver un contre-exemple dans le cas où on suppose seulement que f est continue.