Université Paris 6 Mars 2004
DEUG SCM 23 - 2003/04 – 2nd semestre
Math 4 – Groupes 1/2

TD 3 – Fonctions à plusieurs variables

Exercice 1 – Domaine de définition et existence d'une limite en $(0,0)$ des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par :

$$a)\ f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \qquad b)\ f(x,y) = \frac{(1+x^2+y^2)\sin y}{y} \qquad c)\ f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$$

$$d)\ f(x,y) = \frac{\sin x - \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} x - \sin y} \qquad e)\ f(x,y) = x^y \qquad f)\ f(x,y) = \frac{x^a y^b}{x^c + y^d}$$

Exercice 2 – Étudier la continuité des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ci-dessous. Étudier l'existence et la continuité des dérivées partielles.

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0; \end{cases} \qquad b)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin y - y \sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0; \end{cases}$$

$$c)\ f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| > y \\ y^2 & \text{si } |x| \leqslant y; \end{cases} \qquad d)\ f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \dfrac{x}{y} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0; \end{cases}$$

Exercice 3 – Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par $f(x,y) = (x, y, \arg(x+iy))$. Montrer que f est continue et dérivable le long de tout vecteur de $\mathbb{R}^2$, mais que f n'est globalement pas continue.

Exercice 4 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 – Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $f : U \to \mathbb{R}$. On appelle laplacien de f la fonction

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

On dit que f est *harmonique* si $\Delta f = 0$.

1. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, soit $z = x+iy$, et $f(x,y) = \ln |\, \mathrm{e}^{z\, \mathrm{e}^{-z}} |$. Montrer que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit f une fonction de classe C^3, harmonique sur U. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
3. Montrer que la fonction définie par $f(x,y) = \operatorname{Arctan} \frac{x}{y}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 6 – Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Comparer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont-elles continues ?

Exercice 7 – Déterminer les extrema locaux et globaux de :

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x^3; \quad g(x,y) = (x^2+y^2-8)(x^2+y^2)$$