Université Paris 6 Mars 2004
DEUG SCM 23 - 2003/04 – 2nd semestre
Math 4 – Groupes 1/2

TD 4 – Fonctions définies par une intégrale non généralisée

Exercice 1 – Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et soit ϕ la fonction définie par

$$\phi(x) = \int_a^b \cos(x+t) f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de ϕ.

Exercice 2 – Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et soit ϕ définie par

$$\phi(x) = \int_a^b \cos t\, f(x+t)\ \mathrm{d}t.$$

Montrer que ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et déterminer ϕ'.

Exercice 3 – Étudier la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+xt}\ \mathrm{d}t$$

(continuité, dérivabilité, variations, limite, convexité...)

Exercice 4 – Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Exprimer f' sans symbole d'intégration.

Exercice 5 – Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^\pi \cos(x \sin t)\ \mathrm{d}t$ admet un et un seul zéro sur $[0, \pi]$.

Exercice 6 – Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x\ \mathrm{d}t$$

1. Continuité, dérivabilité, variations, convexité.
2. Trouver pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ une relation entre $f(x)$ et $f(x+2)$. Calculer $f(n)$ (intégrale de Wallis).
3. En déduire la limite de f en $+\infty$, et tracer sa courbe représentative.