TD 5 – Fonctions définies par une intégrale généralisée

Exercice 1 – Soit, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\, \mathrm{d}t$.

1. L'intégrale définissant la fonction f est-elle simplement convergente ? asolument convergente ? normalement convergente ? uniformément convergente ?
2. Étudier la continuité, la dérivabilité de f, et l'existence éventuelle de dérivées successives (que l'on exprimera le cas échéant sous forme intégrale).

Exercice 2 – Étudier la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(x+t)}{t^2+1}\, \mathrm{d}t$

Exercice 3 – Soit f définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 4 –

1. Montrer que l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2+itx}\, \mathrm{d}x$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue, dérivable, et exprimer sa dérivée sous la forme d'une intégrale.
3. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que f vérifie l'équation différentielle
$$2f'(x) + xf(x) = 0.$$
4. En déduire la valeur de $f(x)$ (on admettra que $f(0) = \sqrt{\pi}$, cf. exercice 6)

Exercice 5 – (Sciences de la matière 2ème année, Paris 6, 1998)

1. (a) Trouver les x réels pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\, \mathrm{d}t$ converge.
   (b) Démontrer que la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\, \mathrm{d}t$ est continue sur l'intervalle $]\frac{1}{2}, +\infty[$; calculer $F(1)$ et $F(\frac{3}{2})$.
   (c) Démontrer que F est dérivable et même indéfiniment dérivable ; donner l'expression de la dérivée d'ordre $n+1$ sous forme intégrale.
2. (a) Démontrer que la fonction G définie par $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+x}\, \mathrm{d}t$ existe si $x > 0$.
   (b) Démontrer que G est continue sur $]0, +\infty[$; calculer G sous forme de fonction élémentaire.
   (c) Démontrer que G est dérivable, et même indéfiniment dérivable.
   (d) Calculer la dérivée de G sous forme intégrale et sous forme d'une fonction élémentaire.
   (e) En déduire la valeur de $F(n+1)$.

Exercice 6 – (MIAS 2ème année, Paris 6, janvier 1998)

1. Montrer que l'intégrale généralisée $A(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt$ est convergente pour tout $x > 0$, et que l'on a : $\forall x > 0, A(x) = \frac{A(1)}{\sqrt{x}}$.

Pour calculer $A(1)$, on introduit, pour $x \in [0, +\infty[$, les fonctions

$$f_n(x) = \int_0^n \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt \text{ et } f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$$

2. Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, et que l'on peut dériver sous le signe d'intégration.
3. (a) Montrer que l'intégrale généralisée $f(x)$ est convergente pour tout $x \in [0, +\infty[$.
   (b) Calculer $f(0)$.
   (c) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
4. (a) Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$ vers $f(x)$.
   (b) Montrer que l'intégrale généralisée $g(x) = -\int_0^{+\infty} t^2 \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$ converge pour tout $x \in]0, +\infty[$.
   (c) Montrer que pour tout $a > 0$, la suite f'_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$ vers g.
5. Déduire de la question précédente que sur $[0, +\infty[$, la fonction f est continue, qu'elle est dérivable sur $]0, +\infty[$, et qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) - f(x) = -\frac{A(1)}{\sqrt{x}}.$$

6. En intégrant cette équation, trouver une autre expression de f. Calculer alors $A(1)$.

Exercice 7 – (MIAS 2ème année, Paris 6, septembre 1997)

Pour tout $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-xt}) \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

1. Vérifier que la fonction F est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$, et calculer $F'(x)$.
3. Vérifier que $0 \leqslant 1 - e^{-xt} \leqslant xt$, pour tous x et t positifs ou nuls. En déduire que $\lim_{x\to 0^+} F(x) = 0$.
4. En déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 8 – (MIAS 2ème année, Paris 6, janvier 1997)

Pour tout entier $n > 0$ et tout $x > 0$, on pose $F_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + x^2)^n}$.

1. Montrer que pour tout $n > 0$, F_n est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout $n > 0$, F_n est continue sur $]0, +\infty[$ (on pourra montrer dans un premier temps que pour tout $a > 0$, F_n est continue sur $[a, +\infty[$).
3. Montrer que pour tout $n > 0$, F_n est dérivable sur $]0, +\infty[$, et que sa dérivée vérifie

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ F'_n(x) = -2nxF_{n+1}(x).$$

4. Calculer F_1.
5. Montrer par récurrence que F_n est de la forme $F_n(x) = a_n x^{1-2n}$, où a_n vérifie une relation de récurrence que l'on précisera.
6. En déduire la valeur de $F_n(x)$ pour tout entier $n > 0$, et tout réel $x > 0$.