UNIVERSITÉ PARIS 6 — Avril 2004
DEUG SCM 23 - 2003/04 – 2nd semestre
MATH 4 – GROUPES 1/2

TD 6 – Limites d'intégrales généralisées

Exercice 1 – (Rappel dans le cas d'intégrales non généralisées)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}\sin(\pi x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_n.
2. Calculer la limite de J_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. En déduire la relation $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n$.

Exercice 2 –

1. Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left[\mathrm{ch}\left(\frac{1}{t}\right) - 1\right] \mathrm{d}t$ à 10^{-3} près.
2. Même question pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 – Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 4 – Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{np+1}$.

Exercice 5 – Soit $f_n(x) = \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} u^{-n}\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$. Calculer le développement limité à l'ordre n de $f_n(x)$.

Exercice 6 – Soit (a_n) une suite à termes réels positifs telle que la série $\sum u_n$ soit convergente. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} G(t)\,\mathrm{d}t$, où $G(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$.

Exercice 7 – Soit $S(x)$ la série entière $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{2n+2}\right) x^{4n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de $S(x)$, et montrer que la série converge encore pour $x = R$. Justifier que S est continue sur $[0, R]$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, on a $S(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+t^2-2t^3}{1-t^4x^4}\,\mathrm{d}t$
3. Montrer par un passage à la limite que $S(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+t+2t^2}{1+t+t^2+t^3}\,\mathrm{d}t$
4. Calculer $S(1)$.

Exercice 8 – (Autour de la fonction Γ d'Euler)

On rappelle que, pour $z \in \mathbb{C}$, $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}$.

1. Domaine de définition de Γ.
2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, f_n la fonction définie par $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}$ si $0 \leqslant t < n$, et $f_n(t) = 0$ si $t > n$. Montrer que la suite f_n tend vers $\mathrm{e}^{-t} t^{z-1}$, uniformément sur tout intervalle $[0, A]$.
3. En déduire que $\Gamma(z) = \lim\limits_{n \to \infty} n^z I_n(z)$, où $I_n(z)$ est définie par $I_n(z) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^z \, \mathrm{d}u$.
4. Calculer $I_n(z)$.
5. En déduire que $\dfrac{1}{\Gamma(z)} = z \, \mathrm{e}^{Cz} \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \mathrm{e}^{-\frac{z}{n}}$, où C désigne la constante d'Euler, définie comme la limite (dont on justifiera l'existence) de la suite $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.
6. Montrer que la formule précédente permet de prolonger Γ à $\mathbb{C} - \mathbb{N}$.

Exercice 9 –

1. Soit f la fonction définie par $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$. Déterminer le domaine de définition de f, et exprimer f au moyen de fonctions usuelles.
2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n(t) = \displaystyle\int_0^t u^n \ln u \, \mathrm{d}u$. Calculer $I_n(t)$.
3. Soit $g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2}$, et $J(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\ln u}{1-u^2} \, \mathrm{d}u$. Déterminer le domaine de définition de g et de J.
4. Exprimer J en fonction de g et de fonctions usuelles. En déduire la valeur de $J(1)$ sous forme de série.
5. Par un changement de variable, montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{t \, \mathrm{d}t}{2 \operatorname{sh} t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$
En déduire la valeur de cette intégrale (on rappelle que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

Exercice 10 – Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n}. \end{cases}$$

1. Montrer que les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x$ sont normalement convergentes.
2. Montrer que $I_n = \sqrt{n} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \, \mathrm{d}t$.
3. Calculer I_n.
4. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ (on rappelle la formule de Stirling : $n! \sim_{+\infty} n^n \, \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n}$).