Université Paris 6 — Mai 2004
DEUG SCM 23 - 2003/04 – 2nd semestre
Math 4 – Groupes 1/2

TD 7 – Intégrales multiples

Exercice 1 – Calculer les intégrales suivantes :

$a)\ I=\iint_D xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad D=[0,1]\times[-1,1]$

$b)\ I=\iint_D (x+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad D=[0,1]\times[-1,1]$

$c)\ I=\iint_D \dfrac{y^2}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad D=[0,1]\times[0,1]$

$d)\ I=\iint_D x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad D:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant x\end{cases}$

$e)\ I=\iint_D \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2},\quad D:\begin{cases}x\geqslant 0 \text{ et } y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1\end{cases}$

$f)\ I=\iint_D x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad D:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2\leqslant y\leqslant x\end{cases}$

$g)\ I=\iint_D y\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad D:$ disque de centre (1,1) et de rayon 1

$h)\ I=\iiint_D (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\quad D:\begin{cases}x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\\ x+y+z\leqslant 1\end{cases}$

$i)\ I=\iiint_D xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\quad D:\begin{cases}0\leqslant y\leqslant x\leqslant 2\\ 0\leqslant z\leqslant xy\end{cases}$

Exercice 2 – Déterminer l'intégrale $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où D est l'ensemble des points de coordonnées positives communs au disque de centre $(0,0)$ de rayon 1 et au disque de centre $(0,1)$ de rayon 1.

Exercice 3 – Calculer l'intégrale $\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où D est le domaine borné délimité par la boucle de la courbe d'équation $x^3-3x^2+y^2=0$.

Exercice 4 – Calculer les intégrales suivantes :

$a)\ I=\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D: x^2+y^2\leqslant a^2$

$b)\ I=\iint_D \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2},\ D: x^2+y^2\leqslant 1$

$c)\ I=\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D:\begin{cases}x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\end{cases}$

$d)\ I=\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D:\begin{cases}x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ x^2+y^2\leqslant 1\\ (x-1)^2+y^2\geqslant 1\end{cases}$

$e)\ I=\iint_D x\sqrt{x}^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\ D:\left\{(x,y)\mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$

$f)\ I=\iiint_D \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1+\sqrt{x^2+y^2}},\ D:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant a^2\\ 0\leqslant z\leqslant \frac{1}{1+x^2+y^2}\end{cases}$

$g)\ I=\iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ D:\begin{cases}x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x^2+y^2\leqslant x\end{cases}$

$h)\ I=\iiint_D \dfrac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2+4z^2},\ D: x^2+y^2+4z^2\leqslant 1$

$g)\ I=\iiint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ D:\begin{cases}x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ z\geqslant 0\end{cases}$

$h)\ I=\iiint_D z\,\mathrm{ch}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ D:\begin{cases}x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ z\geqslant 0\end{cases}$

Exercice 5 – Calculer les intégrales suivantes, en effectuant le changement de variables proposé

$a)\ I=\iint_D \sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad D:\begin{cases}x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1\end{cases}\quad x+y=v,\ x=u$

$b)\ I=\iint_D y^2\,\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad D:\begin{cases}0<x\leqslant y\leqslant 2x\\ 1\leqslant xy\leqslant 2\end{cases}\quad u=\frac{y}{x},\ v=xy$

$c)\ I=\iint_D \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad D:\begin{cases}0\leqslant y\leqslant x\\ x+y\leqslant 1\end{cases}\quad u=x-y,\ v=x+y$

$d)\ I=\iiint_D (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\quad D:\begin{cases}x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\\ x+y+z\leqslant 1\end{cases}\quad u=x+y+z,\ v=y+z,\ w=z$

$e)\ I=\iiint_D \mathrm{sh}((x+y+z)^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\quad D:\begin{cases}x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\\ x+y+z\leqslant 1\end{cases}\quad u=x+y+z,\ uv=y+z,\ uvw=z$

Exercice 6 – Calculer :

1. l'aire de l'ellipse définie par les inégalités $-a\leqslant x\leqslant a$ et $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$;
2. l'aire du domaine plan de $(\mathbb{R}_+)^2$ défini par $y^2\leqslant 2ax$ et $x^2\leqslant 2bx$;
3. l'aire de la boucle de strophoïde, définie par $|\theta|\leqslant\frac{\pi}{4}$, et $r=\frac{2\cos^2\theta-1}{\cos\theta}$
4. le volume de la calotte définie par $x^2+y^2+z^2\leqslant 1, z\geqslant a$;

5. le volume du tore de petit rayon $R-r$ et de grand rayon $R+r$ $(R>r)$;
6. le moment d'inertie d'un disque homogène de rayon R par rapport à son centre ;
7. le volume et le moment d'inertie par rapport à son centre d'une boule de rayon R.

Exercice 7 –

1. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\lambda-\cos x}$ suivant les valeurs de λ, et calculer cette intégrale.
2. Soit $1<a<b$. Calculer $\displaystyle\iint_{[0,\pi]\times[a,b]} \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{y-\cos x}$.
3. En déduire la valeur de $J=\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right)\ \mathrm{d}x$.

Exercice 8 – Soit Q le pavé de $\mathbb{R}^2$ défini par $0\leqslant x\leqslant 1$ et $0\leqslant y\leqslant 1$, et soit D le triangle défini par $0\leqslant x\leqslant 1$ et $0\leqslant y\leqslant x$

1. Calculer $\displaystyle\iint_Q \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}$, puis $J=\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}$.
2. En posant $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, puis $r^2=u$, montrer que $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2\cos^2\theta)}{2\cos(2\theta)}\ \mathrm{d}\theta$.
3. Soit $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\ \mathrm{d}t$ et $K=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(2\sin^2\theta)}{2\cos(2\theta)}\ \mathrm{d}\theta$. Exprimer $J+K$ et $J-K$ en fonction de I et en déduire la valeur de I.

Exercice 9 – Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $D_n=[n\pi,(n+1)\pi]\times\mathbb{R}^+$, et $I_n=\displaystyle\iint_{D_n} \mathrm{e}^{-xy}\sin x\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$. Calculer I_n de deux manières différentes. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x$.

Exercice 10 – Pour $t\in\mathbb{R}^+$, on note $C_t=[0,t]\times[0,t]$.

1. Justifier la convergence de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ix^2}\ \mathrm{d}u$, $A=\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x^2\ \mathrm{d}x$ et $B=\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x^2\ \mathrm{d}x$.
2. Soit $\phi(t)=\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{ix^2}\ \mathrm{d}x$. Montrer que $\phi^2(t)=\dfrac{i\pi}{4}-i\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{\frac{it^2}{\cos^2\theta}}\ \mathrm{d}\theta$.
3. Soit $I(T)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \phi^2(t)\ \mathrm{d}t$ Calculer de deux manières différentes la limite en $+\infty$ de $I(T)$.
4. En déduire que $A=B=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 11 – (Paris 6, SCM 2ème année, septembre 1998)
Soit $D_1=\{(x,y)|x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^2+y^2\leqslant 1\}$ et $D_2=\{(x,y)|x\geqslant y\geqslant 0, x^2+y^2\leqslant 1\}$.

1. Calculer l'intégrale $J=\displaystyle\int_0^1 r^2\cos(r)\ \mathrm{d}r$
2. Calculer l'intégrale $I_1=\displaystyle\iint_{D_1} x\cos(\sqrt{x^2+y^2})\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.
3. Calculer l'intégrale $I_2=\displaystyle\iint_{D_2} x\cos(\sqrt{x^2+y^2})\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.

Exercice 12 – (Paris 6, MIAS 2ème année, juin 1998)
On note $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x>0, y>0\}$. On considère la fonction F définie sur D par $F(x,y)=\left(xy,\frac{x}{y}\right)$.

1. Montrer que F est de classe C^1 sur D et déterminer sa matrice jacobienne
2. Montrer que F est une bijection de D sur D. Déterminer sa réciproque G.
3. Expliciter la matrice jacobienne de G en tout point de D.
4. Soit $\varepsilon\in]0,1[$, et $D_\varepsilon=\left\{(x,y)\in D|\varepsilon x\leqslant y\leqslant\dfrac{x}{\varepsilon},\text{ et } xy\leqslant 1\right\}$. On pose $I(\varepsilon)=\displaystyle\iint_{D_\varepsilon}\sqrt{\frac{x}{y}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$. Calculer $I(\varepsilon)$ en utilisant le changement de variable $(u,v)=F(x,y)$, et calculer la limite de $I(\varepsilon)$ lorsque ε tend vers 0.