UNIVERSITÉ PARIS 6 Mai 2004
DEUG SCM 23 - 2003/04 – 2nd semestre
MATH 4 – GROUPES 1/2

TD 8 – Intégrales curvilignes, formule de Green-Riemann

Exercice 1 – En utilisant un paramétrage de C, calculer les intégrales curvilignes $\int_C \omega$ dans les cas suivants. Retrouver les résultats à l'aide de la formule de Green-Riemann (sauf 8).

1. $\omega(x, y) = (x - y^3)\ \mathrm{d}x + x^3\ \mathrm{d}y$, C est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$, parcouru une fois dans le sens direct.
2. $\omega(x, y) = (2x + y)y\ \mathrm{d}x + (x + 2y)x\ \mathrm{d}y$, C est l'arc paramétré $x = \dfrac{1+t}{1+t^4}$, $y = \dfrac{1+t^3}{1+t^4}$, t allant de 0 à 1.
3. $\omega(x, y, z) = z\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}z + y\ \mathrm{d}z$, C est l'intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du plan $x + z = 1$, orienté par le vecteur normal de coordonnées $(1, 0, 1)$.
4. $\omega(x, y, z) = y\ \mathrm{d}x + z\ \mathrm{d}y + x\ \mathrm{d}z$, C est l'intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du plan $x + y + z = 1$, orienté par le vecteur normal de coordonnées $(1, 1, 1)$.
5. $\omega(x, y) = (4x + y^2)\ \mathrm{d}x + (3y^2 + 2xy)\ \mathrm{d}y$,
   (a) C est le segment d'extremités $(0, 0)$ et $(2, 0)$, parcouru dans le sens des x croissants.
   (b) C est l'union des segments d'extrémités $(0, 0)$ et $(1, 1)$ et d'extrémités $(1, 1)$ et $(2, 0)$, parcourus dans le sens des x croissants ;
   (c) C est le demi-cercle d'ordonnée positive de centre $(1, 0)$ et de rayon 1, parcouru dans le sens indirect ;
   (d) C est la courbe d'équation $y = \sin(\pi x)$ pour x allant de 0 à 2.

   Commentaire et explication.
6. $\omega(x, y) = (4x + y^2)\ \mathrm{d}x + (3y^2 + 2y)\ \mathrm{d}y$, C comme dans la question précédente (4 courbes).
7. $\omega(x, y) = (\mathrm{e}^x \sin y + xy^2)\ \mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x \cos y + x^2 y)\ \mathrm{d}y$,
   (a) C est le segment d'extremités $(0, 0)$ et $(1, \pi)$, parcouru dans le sens croissant pour l'abscisse ;
   (b) C est le cercle de centre $(1, \pi)$ de rayon e, parcouru dans le sens positif ;
   (c) C est une courbe fermée quelconque de classe C^1.
8. $\omega(x, y, z) = (y^2 + z^2)\ \mathrm{d}x$, C est l'intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - 2ay = 0$ et du cylindre $x^2 + y^2 - 2by = 0$ (On choisira une orientation de cette courbe).
9. $\omega(x, y) = \left(x + xy^2 + \dfrac{x^3}{3}\right)\ \mathrm{d}y$,
   (a) C est le contour du quart de disque de centre $(0, 0)$ de rayon 1 de coordonnées positives (parcouru dans le sens direct) ;
   (b) C est le contour défini par le segment d'extrémités $(0, 0)$ et $(2, 0)$, le quart de cercle de centre $(0, 0)$ de rayon 1, de coordonnées positives, et l'arc défini en polaires par $r = \sin\theta$, pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 2 – Calculer les intégrales curvilignes $\int_C \omega$ dans les cas suivants, en utilisant la formule de Green-Riemann :

1. $\omega(x, y) = 2y \operatorname{Arctan} x\ \mathrm{d}y + \dfrac{(y - x)^2}{1 + x^2}\ \mathrm{d}x$
   (a) C est le contour du pavé $[0, 1] \times [0, 1]$, orienté positivement ;
   (b) C est le contour du triangle $x \geqslant 0$, $y \leqslant 1$, $y \geqslant x$;
   (c) C est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, dans le sens direct ;
   (d) C est le demi-cercle de centre $(0, 0)$ de rayon 1, d'abscisse positive ;

   Retrouver (a) et (b) en utilisant un paramétrage.
2. $\omega(x, y) = (e^x \cos y + xy^2)\ \mathrm{d}x - (\mathrm{e}^x \sin y + x^2 y)\ \mathrm{d}y$
   C est l'arc de lemniscate d'équation polaire $r^2 = \cos(2\theta)$ contenu dans le secteur $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Exercice 3 –

1. Calculer l'aire de la boucle de l'arc paramétré $x = t^3 - 3t$, $y = t^4 - 8t^2$.
2. Calculer l'aire intérieure à la courbe donnée en polaires par $r = \dfrac{1}{4 + \cos(3\theta)}$.

Exercice 4 – Soit $\omega = \dfrac{x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$, de contour ∂K, orienté positivement.

1. Calculer $\displaystyle\int_{\partial K} \omega$ dans le cas où K ne contient pas l'origine.
2. Calculer $\displaystyle\int_{\partial K} \omega$ dans le cas où K est un disque de centre 0 et de rayon r.
3. En déduire l'expression de $\displaystyle\int_{\partial K} \omega$ dans le cas où K est un compact contenant l'origine.
4. La forme ω est-elle fermée ? exacte ?

Exercice 5 – (Paris 6, SCM 2, septembre 1998)

On pose $\omega = P\ \mathrm{d}x + Q\ dy$, où

$$P = \frac{2xy}{D}, \quad Q = \frac{1 + y^2 - x^2}{D},$$

avec $D = (x^2 + y^2)^2 + 2(y^2 - x^2) + 1$. Soit $\mathcal{D}$ le domaine défini en coordonnées polaires par :

$$\mathcal{D} = \left\{(r, \theta) | 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2\cos(2\theta)}, |\theta| \leqslant \frac{\pi}{4}\right\},$$

et sa frontière

$$\Gamma = \left\{(r, \theta) | r = \sqrt{2\cos(2\theta)}, |\theta| \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}.$$

1. Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma} \omega$ sans utiliser la formule de Green-Riemann.
2. Montrer que $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)(x, y) = 0$ si $(x, y) \neq (1, 0)$ et $(x, y) \neq (-1, 0)$.
3. Commenter et expliquer les résultats des questions 1 et 2.

Exercice 6 – (Limoges, MIAS 2, septembre 1997)

Soit $\omega = (x^2 - y)\ \mathrm{d}x + 2xy\ \mathrm{d}y$ et $D = \{(x, y) | -1 < x < 1,\ -1 < y < 1\}$.

1. ω est-elle fermée ? exacte ?
2. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_{\partial D} \omega$ puis calculer cette intégrale.
3. Faites un deuxième calcul de cette intégrale en utilisant le théorème de Green-Riemann.

Exercice 7 – (Caen, SM 2, partiel janvier 1997)

Soit T le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$T = \left\{(x, y) | 0 \leqslant x - y,\ 0 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y,\ 4 \leqslant x^2 + y^2\right\}.$$

1. Faire un dessin sommaire de T, en précisant les coordonnées des points particuliers, et en hachurant ce domaine.
2. (a) Déterminer les angles optimaux α et β tels que
   $$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in T \Longrightarrow \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta.$$
   (b) Pour $\theta \in [\alpha, \beta]$, déterminer les quantités $r(\theta)$, $R(\theta)$ telles que
   $$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in T \Longrightarrow r(\theta) \leqslant r \leqslant R(\theta).$$
3. Calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_T \frac{y}{x^2 + y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ en passant en coordonnées polaires.
4. Retrouver la valeur de I en utilisant la formule de Green-Riemann.