Institut Galilée
Département de mathématiques
Deug MIAS 1 - 2002/03

Correction du devoir 5 – Intégration

Exercice 1 –

1. On décompose $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ en éléments simples:

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} + P(x)$$

- La partie polynomiale $P(x)$ est le quotient de la division euclidienne de 1 par x^3+1: elle est nulle.
- Pour trouver a, on multiplie l'égalité ci-dessus par $(x+1)$ et on évalue en -1: $a = \frac{1}{3}$.
- Pour trouver b, on peut multiplier par x et prendre la limite en $+\infty$: $a+b=0 \Longrightarrow b = -\frac{1}{3}$
- Pour trouver c, on peut évaluer en 0: $c = \frac{2}{3}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int f(x)\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} \\ &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}.\end{aligned}$$

Pour la dernière primitive, on se ramène à la primitive de $\frac{1}{1+y^2}$ par un changement de variable linéaire:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

Soit $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\mathrm{d}y = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \mathrm{d}x$. Alors:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \mathrm{Arctan}(y) + C.$$

Finalement:

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Remarque. La constante d'intégration C est en fait une fonction *localement constante*, c'est-à-dire constante sur chacun des intervalles constituant le domaine de définition. Ici le domaine de définition est $]\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$. Ainsi, C est une constante sur chacun de ces deux intervalles, mais la valeur de cette constante peut varier d'un intervalle à l'autre.

2. On se ramène à la primitive d'une fraction rationnelle par intégrations par parties et/ou changements de variables. Ici, une intégration par parties avec:

$$\begin{array}{ll} u(x) = \mathrm{Arctan}(x) & u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} & v(x) = 2\sqrt{x} \end{array}$$

donne l'égalité suivante:

$$\int \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\mathrm{Arctan}(x) - \int \frac{2\sqrt{x}}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$

On fait maintenant un changement de variable $y = \sqrt{x},\ \ \mathrm{d}x = 2y\ \mathrm{d}y$:

$$\int \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\mathrm{Arctan}(x) - 4\int \frac{y^2}{1+y^4}\ \mathrm{d}y$$

On décompose $\frac{y^2}{1+y^4}$ en éléments simples:

$$\frac{y^2}{1+y^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{y}{y^2-\sqrt{2}y+1} - \frac{y}{y^2+\sqrt{2}y+1}\right)$$

Pour trouver cette décomposition, on peut par exemple utiliser la parité, évaluer en 0 et en $\sqrt{2}$. On calcule $\int \frac{y}{y^2-\sqrt{2}y+1}\ \mathrm{d}y$ de manière similaire à 1:

$$\begin{aligned}
\int \frac{y}{y^2-\sqrt{2}y+1}\ \mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int \frac{2y-\sqrt{2}}{y^2-\sqrt{2}y+1}\ \mathrm{d}y + \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{y^2-\sqrt{2}y+1}\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\ln(y^2-\sqrt{2}y+1) + \int \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} \\
&= \frac{1}{2}\ln(y^2-\sqrt{2}y+1) + \mathrm{Arctan}(z) + C = \frac{1}{2}\ln(y^2-\sqrt{2}y+1) + \mathrm{Arctan}(\sqrt{2}y-1) + C,
\end{aligned}$$

où on a fait le changement de variables $z = \sqrt{2}y - 1$. De même,

$$\int \frac{y}{y^2+\sqrt{2}y+1}\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\ln(y^2+\sqrt{2}y+1) - \mathrm{Arctan}(\sqrt{2}y+1) + C.$$

Finalement,

$$\int \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\mathrm{Arctan}(x) - \sqrt{2}\mathrm{Arctan}(\sqrt{2x}-1) - \sqrt{2}\mathrm{Arctan}(\sqrt{2x}+1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x-\sqrt{2x}+1}{x+\sqrt{2x}+1} + C.$$

3. En faisant une intégration par parties avec:

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = \sqrt{1+x} & v(x) = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \end{array}$$

on obtient:

$$\int \sqrt{1+x}\ln x\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{4}{3}\int \frac{y^4}{y^2-1}\ \mathrm{d}y,$$

où on a posé $y = \sqrt{1+x}$, donc $x = y^2 - 1$, donc $\mathrm{d}x = 2y\ \mathrm{d}y$. Comme d'habitude, on fait une décomposition en éléments simples:

$$\frac{y^4}{y^2-1} = y^2 + 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x}\ln x\ \mathrm{d}x &= \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{4}{9}y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{2}{3}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C \\
&= \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{4}{9}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}\sqrt{1+x} - \frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right| + C.
\end{aligned}$$

Exercice 2 –

1. La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[0,1]$, elle est donc bornée: il existe M (indépendant de n) tel que $|\tan x| \leqslant M$ pour tout $x \in [0,1]$. Alors
$$|I_n| \leqslant \int_0^1 |\tan x| \cdot |x^n| \, \mathrm{d}x \leqslant M \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x \leqslant \frac{M}{n+1}.$$
Puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{M}{n+1} = 0$, on en déduit que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.
Pour J_n, on fait d'abord une intégration par parties avec
$$\begin{array}{ll} u(x) = \tan x & u'(x) = 1 + \tan^2 x \\ v'(x) = x^n & v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \end{array}$$
on obtient:
$$J_n = \frac{n}{n+1} \tan 1 - \frac{n}{n+1} \int_0^1 (1 + \tan^2 x) x^{n+1} \, \mathrm{d}x.$$
La limite de $\frac{n}{n+1} \tan 1$ est $\tan 1$. D'autre part, la fonction $x \mapsto 1 + \tan^2 x$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[0,1]$, elle est donc bornée: il existe M' tel que $|1 + \tan^2 x| \leqslant M'$ pour tout $x \in [0,1]$. Alors
$$\left| \int_0^1 (1 + \tan^2 x) x^{n+1} \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^1 \left| (1 + \tan^2 x) x^{n+1} \right| \, \mathrm{d}x \leqslant M' \int_0^1 x^{n+1} \, \mathrm{d}x \leqslant \frac{M'}{n+2} \longrightarrow 0.$$
Donc $\lim_{n\to\infty} J_n = \tan 1$

2. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, la méthode précédente montre que $\lim_{n\to+\infty} \left(n \int_0^1 x^n f(x) \, \mathrm{d}x \right) = f(1)$.

Dans le cas général, f n'est pas dérivable. Il faut procéder différemment. Intuitivement, lorsque n devient grand, $x^n f(x)$ est petit pour $x \in [0,1]$, sauf sur un voisinage de 1, où $x^n f(x)$ est proche de $f(1)$. En utilisant la continuité de f, on va découper l'intervalle d'intégration en deux; le deuxième intervalle est un intervalle sur lequel $f(x)$ est ε-proche de $f(1)$. Plus précisément, soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f en 1,
$$\exists \delta, 0 < \delta \leqslant 1, \text{ tel que } \forall x \in [1-\delta, 1], |f(x) - f(1)| < \varepsilon.$$
Alors
$$\begin{aligned}
\left| n \int_0^1 x^n f(x) \, \mathrm{d}x - \frac{n}{n+1} f(1) \right| &= \left| n \int_0^1 x^n (f(x) - f(1)) \, \mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant \left| n \int_0^{1-\delta} x^n (f(x) - f(1)) \, \mathrm{d}x \right| + \left| n \int_{1-\delta}^1 x^n (f(x) - f(1)) \, \mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant n \int_0^{1-\delta} x^n \, |f(x) - f(1)| \, \mathrm{d}x + n\varepsilon \int_{1-\delta}^1 x^n \, \mathrm{d}x \\
&\leqslant nM \int_0^{1-\delta} x^n \, \mathrm{d}x + \frac{n}{n+1} \varepsilon \left[1 - (1-\delta)^{n+1} \right] \\
&\qquad \text{où } M \text{ est tel que } \forall x \in [0,1], |f(x) - f(1)| \leqslant M \text{ (existe par continuité)} \\
&\leqslant M \frac{n}{n+1} (1-\delta)^{n+1} + \varepsilon.
\end{aligned}$$
Puisque $|1-\delta| \leqslant 1$, la suite $M \frac{n}{n+1} (1-\delta)^{n+1}$ converge vers 0. Donc, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $M \frac{n}{n+1} (1-\delta)^{n+1} < \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geqslant N$, $\left| n \int_0^1 x^n f(x) \, \mathrm{d}x - \frac{n}{n+1} f(1) \right| < 2\varepsilon$. Par conséquent,
$$\lim_{n\to+\infty} \left(n \int_0^1 x^n f(x) \, \mathrm{d}x \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1} f(1) \right) = f(1).$$

Exercice 3 – Puisque $f(x) = f(-x)$, $f(x+2\pi) = f(x)$ et $f(\pi - x) = f(x)$, on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Les fonctions $u \mapsto \sin^2 u$ et $v \mapsto \cos^2 v$ sont des bijections continues de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[0; 1]$. On peut donc faire les changements de variables $t = \sin^2 u = \cos^2 v$, soit $\mathrm{d}t = \sin(2u)\ \mathrm{d}u = -\sin(2v)\ \mathrm{d}v$. Alors

$$f(x) = \int_0^x u \sin(2u)\ \mathrm{d}u - \int_{\frac{\pi}{2}}^x v \sin 2v\ \mathrm{d}v = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin u\ \mathrm{d}u.$$

Par une intégration par parties, on obtient alors:

$$f(x) = \left[-\frac{1}{2} u \cos(2u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u)\ \mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}, \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \text{ puis } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 –

1. On va montrer que si n est pair, alors $I_n > 0$, et si n est impair, alors $I_n < 0$. Commençons par montrer les inégalités larges. Soit f la fonction de $[0; \pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(bx - a)$. La fonction f est négative sur $[0; \pi = \frac{a}{b}]$. Donc $P_n(x) = \frac{1}{n!} f(x)^n$ est négatif si n est impair, et positif sinon; il en est de même de $P_n(x)\sin(x)$. Ainsi, I_n est l'intégrale d'une fonction de signe constant, positif si n est pair, négatif si n est impair. Donc $I_n \geqslant 0$ si n est pair, et $I_n \leqslant 0$ si n est impair.

   Les inégalités sont strictes car I_n est l'intégrale d'une fonction continue de signe constant et non partout nulle. En effet, si I_n était nulle, cela signifierait que la fonction $F : x \mapsto \int_0^x P_n(t)\sin(t)\ \mathrm{d}t$ vérifie $F(0) = F(\pi) = 0$. Or, elle est monotone, car sa dérivée $x \mapsto P_n(t)\sin(t)$ est de signe constant. Donc $F(x) = 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$. Sa dérivée $P_n(t)\sin(t)$ serait donc nulle sur tout $[0; \pi]$, ce qui n'est pas le cas.

2. Le polynôme $n!P_n(X) = X^n(bX - a)^n$ est à coefficients entiers (développer par la formule du binôme). De plus, 0 est racine de multiplicité n de $n!P_n(X)$, donc $n!P(0) = n!P'(0) = \cdots = n!P^{(n-1)}(0) = 0$. Par conséquent, la formule de Taylor en 0 pour $n!P_n$ s'écrit:

   $$n!P_n(X) = P_n^{(n)}(0)X^n + \frac{P_n^{(n+1)}(0)}{n+1}X^{n+1} + \cdots + \frac{P_n^{(n+k)}(0)}{(n+1)\cdots(n+k)}X^{n+k} + \cdots + \frac{P_n^{(2n)}(0)}{(n+1)\cdots(2n)}X^{2n}.$$

   Puisque $n!P_n(X)$ est à coefficients entiers, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\frac{P_n^{(n+k)}(0)}{(n+1)\cdots(n+k)}$ est un entier, donc aussi $P_n^{(n+k)}(0)$. Les autres dérivées de P_n en 0 étant nulles, $P_n^{(k)}(0)$ est entier pour tout k.

   On procède de même pour $P_n^{(k)}(\pi) = P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$, en effectuant le changement de variable $Y = X - \frac{a}{b}$.

3. En intégrant I_n par parties $2n + 1$ fois successivement, on obtient

   $$I_n = -\left[P_n(x)\cos(x)\right]_0^\pi + \left[P_n'(x)\sin(x)\right]_0^\pi + \left[P_n''(x)\cos(x)\right]_0^\pi - \left[P_n^{(3)}(x)\sin(x)\right]_0^\pi \pm \cdots \pm \left[P_n^{(2n)}(x)\cos(x)\right]_0^\pi.$$

   Les signes vérifient une périodicité de 4. Cela dit, il n'est pas nécessaire de connaître ces signes pour la suite. Tous les termes de cette somme sont des entiers. En effet $\left[P_n^{(k)}(x)\sin(x)\right]_0^\pi = 0$ et $\left[P_n^{(k)}(x)\cos(x)\right]_0^\pi = P_n^{(k)}(\pi) - P_n^{(k)}(0)$ qui est entier d'après la question précédente. Donc $I_n \in \mathbb{N}$.

4. La fonction $f : x \mapsto x(bx - a)$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[0; \pi]$. Il existe donc M tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in [0; \pi]$. Alors $P_n(x) \leqslant \frac{M^n}{n!}$ pour tout $x \in [0; \pi]$. Ainsi:

   $$|I_n| = \left|\int_0^\pi P_n(x)\sin(x)\ \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^\pi |P_n(x)\sin(x)|\ \mathrm{d}x \leqslant \int_0^\pi \frac{M^n}{n!}\ \mathrm{d}x \leqslant \pi\frac{M^n}{n!} \longrightarrow 0.$$

5. D'après la question 3, $|I_n|$ est entier. D'après la question 1, $|I_n| \neq 0$, donc $|I_n| \geqslant 1$. D'après la question 4, la limite de I_n existe et vaut 0. Or, l'inégalité $|I_n| \geqslant 1$ donne, en passant à la limite, $0 = \lim\limits_{n\to\infty} I_n \geqslant 1$, ce qui apporte une contradiction. L'hypothèse de départ (à savoir que π est rationnel) est donc fausse. Conclusion: π est irrationnel.