Institut Galilée
Département de mathématiques
Deug MIAS 1 - 2002/03

Devoir 5 – Intégration

À rendre durant la semaine du 19/05/2003 au 23/05/2003.

Exercice 1 – Calculer les primitives des fonctions suivantes (on précisera le domaine de définition):

$$f(x) = \frac{1}{x^3+1}; \qquad f(x) = \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{\sqrt{x}}; \qquad \sqrt{1+x}\ln(x).$$

Exercice 2 –

1. Déterminer les limites des suites I_n et J_n ci-dessous:

$$I_n = \int_0^1 x^n \tan(x)\ \mathrm{d}x; \qquad J_n = n\int_0^1 x^n \tan(x)\ \mathrm{d}x.$$

2. Plus généralement, soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\int_0^1 x^n f(x)\ \mathrm{d}x\right)$.

Exercice 3 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \mathrm{Arcsin}\sqrt{t}\ \mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2 x} \mathrm{Arccos}\sqrt{t}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 4 – Le but de cet exercice est de montrer que π est irrationnel. On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $\pi = \frac{a}{b}$. Pour tout entier $n > 0$, on note alors

$$P_n = \frac{1}{n!}X^n(bX-a)^n \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_0^{\pi} P_n(x)\sin(x)\ \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que pour tout n, $I_n \neq 0$.
2. Montrer que pour tout $n > 0$ et tout entier $k \geq 0$, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\pi)$ sont des entiers.
3. En déduire, en intégrant par parties, que pour tout $n > 0$, I_n est un entier.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$
5. En déduire une contradiction. Conclusion ?