Polynômes

Exercice 1 – Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}[X]$, lesquels ne sont pas des sous-espaces vectoriels:

1. $\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes de degré au plus n ;
2. l'ensemble des polynômes de degré exactement n ;
3. l'ensemble des polynômes dont le terme de degré n est nul;
4. l'ensemble $\{P \cdot Q \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}$, pour un polynôme donné P ;
5. l'ensemble des polynômes unitaires.
6. l'ensemble des polynômes admettant 1 pour racine;
7. l'ensemble des polynômes admettant 1 pour racine simple.

Exercice 2 –

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille $1, (X - a), \dots, (X - a)^n$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer qu'elle forme une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .
2. Soit plus généralement une famille $(P_0, \dots, P_n)$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, tels que pour tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$, P_k soit de degré k . Montrer qu'elle constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3 – Étudier la liberté des systèmes $(P_0, \dots, P_n)$ suivants:

1. pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $P_k = 1 + X + \dots + X^{k-1} - nX^k + X^{k+1} + \dots + X^n$;
2. pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$.

Exercice 4 – Quels sont les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$?

Exercice 5 –

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n(X) + P_n(X + 1) = 2X^n$. Quel est le degré de P_n ?
2. Pour $n > 0$, déterminer P'_n en fonction de P_{n-1} .
3. À l'aide de la formule de Taylor, exprimer $P_n(X + 1)$ en fonction de $P_0, P_1, \dots, P_n$. En déduire une relation de récurrence exprimant P_n en fonction de $P_0, \dots, P_{n-1}$.

Exercice 6 – Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 comme racine des polynômes:

- a) $X^n - nX + (n - 1)$;
- b) $X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$;
- c) $X^{2n+1} - (2n + 1)X^{n+1} + (2n + 1)X^n - 1$.

Exercice 7 – Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé.

1. On suppose que P n'a que des racines simples. Montrer que P' est scindé, n'a que des racines simples, et que ces racines séparent celles de P .

2. On ne suppose plus que P n'a que des racines simples. Montrer que P' est encore scindé. Localiser les racines de P' par rapport à celles de P .
3. Soit $\alpha > 0$. Montrer que les racines de $P^2 + \alpha^2$ dans $\mathbb{C}$ sont toutes simples.

Exercice 8 – Pour tout entier $n \geq 2$, on note $P_n = X^n + X^{n-1} + \dots + X^2 + X - 1$.

1. Montrer que P_n a une unique racine u_n dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que u_n converge.
3. Déterminer la limite de u_n (on pourra considérer le polynôme $(X - 1)P_n(X)$).

Exercice 9 – Soit $E_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!}$.

1. Montrer que E_n n'admet pas de racine réelle si n est pair, et en admet exactement une si n est impair.
2. On note u_k la racine réelle de E_{2k+1} . En utilisant la formule de Taylor-Lagrange pour e^x , montrer que l'erreur faite en approchant $e^{-(2k+1)}$ par $E_{2k+1}(-(2k+1))$ est supérieure à $e^{-(2k+1)}$. En déduire que $u_k > -(2k+1)$, puis que u_k est décroissante. Si sa limite ℓ est finie, montrer que $e^\ell = 0$. En déduire que u_k tend vers $-\infty$.
3. Montrer que E_n n'admet pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

Exercice 10 – Trouver les quotients et les restes des divisions euclidiennes de P par Q :

1. $P = 3X^4 + X^3 - 2X^2 + 1$; $Q = X - 1$;
2. $P = X^6 + X^5 - X$; $Q = 2X + 1$;
3. $P = X^{10} + 1$; $Q = X - 2$.

Exercice 11 – Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ (sans utiliser la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$) les polynômes $X^5 - 1$ et $X^6 + 1$.

Exercice 12 – Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$, unitaires, de degré 3, divisibles par $X - 1$, et dont les restes des divisions euclidiennes par $X - 2$, $X - 3$, $X - 4$ sont égaux.

Exercice 13 – Soit a et b deux entiers strictement positifs. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$.

Exercice 14 – Trouver les restes des divisions euclidiennes de $(X - 3)^{3n} - (X - 2)^n - 2$ par:

- a) $(X - 3)(X - 2)$; b) $(X - 3)^2$; c) $(X - 3)^2(X - 2)^2$; d) $X^2 - 1$.

Exercice 15 – Déterminer tous les entiers strictement positifs n tels que $(X^2 + X + 1)^2$ divise $(X + 1)^n - X^n - 1$.

Exercice 16 – Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes

1. sur $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ pour que $P = X^2 + pX + q$ divise $P(X^2 + 1)$ dans $\mathbb{C}[X]$;
2. sur $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ pour que $X^3 + X^2 - cX + 1$ divise $X^5 + aX^2 + b$ dans $\mathbb{C}[X]$;
3. sur $(a, b) \in \mathbb{Z}$ pour que $(X - 1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Déterminer le quotient.

Exercice 17 – Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$. Montrer que $X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$ est divisible par $X^3 + X^2 + X + 1$.

Exercice 18 – Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P .