Institut Galilée
Département de mathématiques
Deug STPI 1 - 2002/03 - Groupe 3

TD n^o 3 : Applications linéaires.

Exercice 1
Déterminer si les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ sont linéaires ou non. Si oui, déterminer leur image et leur noyau.

1. $(x,y) \mapsto (0,0)$;
2. $(x,y) \mapsto (x,y)$;
3. $(x,y) \mapsto (x,0)$;
4. $(x,y) \mapsto (0,y^2)$;
5. $(x,y) \mapsto (x,x)$;
6. $(x,y) \mapsto (y,x)$;
7. $(x,y) \mapsto (x-3y,2x)$;
8. $(x,y) \mapsto (x+y,|y|)$;
9. $(x,y) \mapsto (x,\sin y)$;
10. $(x,y) \mapsto (x+2,y)$.

Exercice 2
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Montrer que f est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

Exercice 3
Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer les formules suivantes :

1. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Ker}(g))$;
2. $\mathrm{Ker}(g \circ f) \supset \mathrm{Ker}(f)$;
3. $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im}(f))$;
4. $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$;
5. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$;
6. $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g) \iff \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f) = F$.

Exercice 4
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un projecteur si $p \circ p = p$. Montrer que p est un projecteur si et seulement s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E tels que :
   - $E = F \oplus G$,
   - pour tout $v \in F$ et $w \in G$, on a $p(v+w) = v$.

   Autrement dit, p est la *projection sur F parallèlement à G*.
2. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On dit que s est une symétrie si $s \circ s = \mathrm{id}$. Montrer que s est une symétrie si et seulement s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E tels que :
   - $E = F \oplus G$,
   - pour tout $v \in F$ et $w \in G$, on a $s(v+w) = v - w$.

   Autrement dit, s est la *symétrie par rapport à F parallèlement à G*.

Exercice 5
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et p et q deux projecteurs de E (*cf.* exercice 4). Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 6
Soit E un espace vectoriel sur R, p un projecteur de E, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $p \circ f = f \circ p$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par f.

Exercice 7
Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$. On note f et g les applications de E dans E définies par :

$$f(P) = P'; \quad g(P) = XP.$$

1. Montrer que f et g sont linéaires.
2. Montrer que f est surjective et non injective.
3. Montrer que g est injective et non surjective.

Conclusion ?

Exercice 8
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $f \circ f = 0$ et $n = 2\,\mathrm{rg}(f)$.

Exercice 9
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension finie, et f et g deux endomorphismes dans $\mathcal{L}(E)$. On suppose que

$$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g).$$

Montrer que ces deux sommes sont directes.

Exercice 10
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3, et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ f = 0$ et $f \neq 0$. Montrer que le rang de f est 1.

Exercice 11
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un automorphisme g et un projecteur p tels que $f = g \circ p$.

Exercice 12
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et f, g dans $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
2. On suppose que $f \circ g = 0$ et que $f + g$ est inversible. Montrer que

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim(E).$$