EXTENSIONS DE FONCTEURS COMPOSÉS

Soit $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs entre la catégorie des espaces vectoriels finis sur $\mathbb{F}_p$ et la catégorie de tous les espaces vectoriels. L'objet essentiel de ce travail est le calcul de groupes d'extensions $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, F)$ *dans cette catégorie. Ces groupes généralisent la notion de cohomologie de Mac Lane à coefficients dans un bimodule.*

Nous nous intéressons plus particulièrement au cas où F est une composition de foncteurs, par exemple une composition $S^n \circ S^m$ de puissances symétriques. Nous obtenons :

- *une description, en caractéristique* 2, *du module* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n \circ S^m)$ *sur l'algèbre* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$, *le produit étant la composition de Yoneda des extensions ;*
- *une formule exprimant le module* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, G \circ F)$ *en fonction des modules* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, F)$, $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, G)$ *et* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n \circ S^m)$, *pour une certaine classe de foncteurs F et G ;*
- *une décomposition de $S^n \circ I$, où $I(V) = \mathbb{F}_p{}^{V^*}$, permettant de retrouver la description due à Betley des modules* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n \circ I)$ *en caractéristique* 2 *; notre méthode présente probablement l'avantage de s'adapter au calcul d'autres groupes* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(-, S^n \circ I)$.

Nos méthodes reposent sur l'utilisation des suites spectrales d'hypercohomologie de complexes bien choisis. Les points clés sont l'exactitude de la composition à gauche modulo $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, -)$, *et un théorème permettant de comparer les groupes d'extensions dans la catégorie $\mathcal{F}$ et dans la catégorie $\mathcal{P}$ des foncteurs strictement polynomiaux introduite par Friedlander et Suslin. Dans cette catégorie, les calculs sont plus aisés, grâce à la finitude des dimensions projectives.*

EXTENSIONS OF COMPOSED FUNCTORS

Let $\mathcal{F}$ be the category of functors from the category of finite $\mathbb{F}_p$-vector spaces to the category of all $\mathbb{F}_p$-vector spaces. The aim of this work is the calculation of some Ext*-groups of the type* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, F)$, *which generalize the notion of Mac Lane cohomology with coefficients in a bimodule.*

We are more precisely interested in the case when F is a composition of functors, say for example a composition $S^n \circ S^m$ of symmetric powers. We get :

- *a description, in characteristic* 2, *of the module* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n \circ S^m)$ *over the algebra* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ *for the product given by the Yoneda composition of extensions ;*
- *a formula giving the Yoneda module* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, G \circ F)$ *in terms of* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, F)$, $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, G)$ *and* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n \circ S^m)$, *for some class of functors F and G ;*
- *a decomposition of $S^n \circ I$, where $I(V) = \mathbb{F}_p{}^{V^*}$, leading to the description, already known by Betley, of* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, S^n \circ I)$. *Our method may be generalized for other groups* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(-, S^n \circ I)$.

Our main tools are the hypercohomology spectral sequences of the pre- or post-composition of a complex by a functor. The main arguments are first the exactness modulo $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(\mathrm{Id}, -)$ *of postcomposition, and also a comparison theorem between* Ext*-groups in the category $\mathcal{F}$ and the category $\mathcal{P}$ of strict polynomial functors introduced by Friedlander and Suslin. Computations are easier in this category $\mathcal{P}$, essentially because of finiteness of injective and projective dimensions.*

Mots-clés : cohomologie de Mac Lane – catégories de foncteurs – groupes d'extensions – suites spectrales d'hypercohomologie – puissances symétriques

Discipline : mathématiques.

LAGA – Institut Galilée – Université Paris 13
99, avenue Jean-Baptiste Clément,
93430 VILLETANEUSE.